Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W., Weigand, H.-G.[1]

Expertise
zum
Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe

Gliederung

1. ZIELSETZUNGEN

Grundpositionen

In den neunziger Jahren haben Allgemeinbildungskonzepte die Diskussion um den Mathematikunterricht stark beeinflusst. Die Entwicklung der neuen NRW-Richtlinien für die Sekundarstufe II ist ein prominentes Beispiel. Gefragt waren Konzeptionen mit erkennbar bildungstheoretischen und pädagogischen Wurzeln. Das macht einerseits die Stärke solcher Ansätze aus, da sie die Übertragbarkeit auf verschiedene Fächer sichern. Andererseits besteht die Gefahr, dass die inhaltliche Besonderheit des Faches Mathematik nur geschwächt zur Geltung kommt. Die hier angedeutete kritische Distanz ist kein Plädoyer für eine rückwärtsgewandte wissenschaftsprop deutische Orientierung, vielmehr geht es uns um eine *mathematikdidaktische Position*, die fachinhaltliche Ansprüche und erziehungswissenschaftliche Überzeugungen explizit und themenabhängig aufeinander bezieht. Passend hierzu (und in fruchtbarer Abgrenzung etwa zum Ansatz von Heymann 1996) führt Winter mit breiter Zustimmung aus, was den allgemeinbildenden Auftrag des Mathematikunterrichts ausmacht:

Der Mathematikunterricht ist dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht (Winter 1995):

(G1) „*Erscheinungen der Welt um uns,* die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, *in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*

[1] Wir danken W. Blum (Kassel) und M. Neubrand (Flensburg) für ihre konstruktiven Anmerkungen.

i-

che unserer Welt. (G2) zielt auf die Mathematik als selbstreferentielles System von abstraktem und formalem Charakter. In diesem System ist es möglich, bei genau vereinbarter Argumentationsbasis schlüssig und ohne Rückgriff auf Autoritäten zu gesicherten Erkenntnissen zu gelangen. Charakteristisch für die Mathematik ist das Spannungsverhältnis zwischen (G1) und (G2), in dem sich die Doppelnatur der Mathematik von *Abbildfunktion und systemischem Charakter* (BLK-Expertise 1997) spiegelt und das ihre breite Anwendbarkeit erst möglich macht. Im Oberstufenunterricht muss dieses dynamische Gleichgewicht in besonderem Maße zur Geltung kommen. Modellbildende Aktivitäten sind dafür konstituierend und deshalb unverzichtbar. Sie gehen in beide Richtungen: Zum einen begleiten sie das Mathematisieren außermathematischer Situationen, zum anderen ist die innermathematische Modellierung ein Mittel zur begrifflichen Durchdringung.

Die Grunderfahrung (G3) berührt die Bedeutung der Heuristik für das Lernen von Mathematik. Heuristische Fähigkeiten sind Grundlage für eine verständige Erschließung unserer Welt. Sie sind eingebettet in eine *intellektuelle Haltung*, zu der auch die Bereitschaft gehört, sich frei, kreativ und positiv gestimmt einer gedanklichen Herausforderung zu stellen. Die Entwicklung dieser Haltung zählt zu den zentralen Aufgaben des Mathematikunterrichts. In der Sekundarstufe II gilt es darüber hinaus, sich der Kraft heuristischer Strategien *bewusst* zu werden.

Der Einsatz neuer Technologien ist für alle drei Grunderfahrungen gleichermaßen bedeutsam und hilfreich: Zum einen ist der Computer ein leistungsfähiges Werkzeug zur Unterstützung von Modellbildungen und Simulationen (→(G1)), zum anderen kann er – vor allem durch dynamische Visualisierungen - den Aufbau adäquater Grundvorstellungen mathematischer Begriffe positiv beeinflussen (→(G2)), und schließlich beflügelt der Computer heuristisch-experimentelles Arbeiten beim Problemlösen (→(G3)).

Wählt man diesen Rahmen als programmatische Orientierung für eine didaktische Neubewertung der (hier nicht infrage gestellten) Lernbereiche der Oberstufenmathematik, so erwachsen daraus folgende **Leitlinien**:

(L1) Grund- und Leistungskurse bedürfen gleichermaßen aller drei Grunderfahrungen. Leistungskurse dürfen sich nicht auf die zweite, Grundkurse nicht auf die erste Grunderfahrung beschränken.

(L2) Jeder Lernbereich (Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik) muss seine verbindlichen Inhalte als exemplarischen Beitrag zur Integration dieser drei Grunderfahrungen legitimieren.

(L3) Die Betonung heuristischer Denk- und Arbeitsweisen relativiert die Bedeutung der formalen Fachsprache als Träger mathematischer Kommunikation. Zur Stärkung der natürlichen Sprache im Mathematikunterricht gehört die Philosophie von der e-ckung des Inhaltlichen in einer neuen Unterrichtskultur‘.

Es gehört zum Kern der Grunderfahrung (G1), die Mathematikhaltigkeit unseres Alltags zu thematisieren (Elemente dieser Richtung findet man etwa in dem bemerkenswerten niederländischen Wiskunde A – Projekt). Mit Blick auf den Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe halten wir eine Reduktion auf diesen bedeutsamen Aspekt für unzulässig (vgl. Leitlinie (L1)). Kurz und plakativ: Eine einseitige Betonung der deduktiv organisierten Mathematik ($\rightarrow$ (G2)) zu Lasten der echten Anwendungen ($\rightarrow$ (G1)) und der Erfahrung heuristischen Arbeitens ($\rightarrow$ (G3)) ist genauso problematisch wie eine Überbetonung der Grunderfahrung (G1) zu Lasten von (G2) und (G3). Dass schließlich (G3) ohne innige Verbindung zu (G1) und (G2) inhaltsleer wird, liegt auf der Hand. *Erst in der expliziten Integration aller drei Grunderfahrungen kann der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe seine spezifisch bildende Kraft entfalten.* (vgl. Leitlinie (L2)). Dies ist die mathematikdidaktische Position als Antwort auf den Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe, der nach breitem Konsens darin besteht, *vertiefte Allgemeinbildung*, *Wissenschaftspropädeutik* und *Studierfähigkeit* zu verbinden.

Für die Konkretisierung dieser Position in den drei Lernbereichen der Oberstufenmathematik gibt es vielversprechende Ansätze und Einzelmaterialien, eine ausgearbeitete Gesamtkonzeption im Sinne der drei Leitlinien steht jedoch gegenwärtig nicht zur Verfügung. Hier besteht nachhaltiger fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsbedarf.

Um diese Leitlinien unterrichtlich wirksam werden zu lassen, bedarf es einiger allgemeiner Orientierungen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II, insbesondere der folgenden (man vergleiche etwa Blum 1995 für den Lernbereich Analysis):

- Eine angemessene Mischung formaler und präformaler Arbeitsweisen beim Begriffsbilden und beim Argumentieren, wobei besonders darauf zu achten ist, dass Lernende adäquate *Grundvorstellungen* von den zentralen Begriffen und Methoden erwerben. Solche Vorstellungen dienen der Sinnkonstruktion und schaffen die notwendigen Verbindungen zwischen Mathematik, Realität und individuellen mentalen Strukturen.
- Herstellen von *Bezügen* zu Alltag, Umwelt, anderen Fächern und Disziplinen, unter besonderer Betonung des Modellierens. Dies dient nicht nur zum Erleben von Grunderfahrung (G1), sondern gleichermaßen zur Ausformung eines adäquaten Bildes von Mathematik wie auch zur Unterstützung des mathematischen Begriffsverständnisses und zur blemlösefähigkeiten.
- Systematischer Gebrauch geeigneter *Werkzeuge* wie insbesondere Taschencomputer und PCs, sowohl zur Effektivierung des Unterrichts als auch zur Bereicherung des fachmethodischen Instrumentariums (genaueres dazu wird in Abschnitt 3.3 ausgeführt).

Zur Unterrichtskultur

Entscheidend für die Unterrichtskultur ist die Art und Weise, *wie* im Unterricht mit der Mathematik umgegangen wird. Hier geht es um den Unterschied zwischen *Mathematik als Produkt* und *Mathematik als Prozess*. Eine Orientierung am Produkt richtet den Blick auf die Resultate und strebt daher tendenziell Abgeschlossenheit an; eine Orientierung am Prozess ist an der Entwicklung des Wissens und an der Entdeckung von Zusammenhängen interessiert, sie lässt daher Offenheit zu. Beide Sichtweisen gehören zu einem gültigen Bild von der Mathematik, aber *nur eine prinzipiell offene, prozessorientierte Unterrichtsführung kann der Bedeutung der Heuristik für das Lernen von Mathematik gerecht werden* (vgl. Grunderfahrung (G3)).

Erfolgreiche Lernprozesse zeichnen sich durch zwei charakteristische Merkmale aus: Sie sind *konstruktiv* und *kumulativ*. Da Lernen

– *konstruktiv* ist, spielt die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler eine entscheidende Rolle,

und da es

– *kumulativ* ist, wird die Vernetzung neuer Inhalte mit dem Vorwissen zu einer wichtigen Bedingung erfolgreichen Unterrichts.

Beides gewinnt im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe besonderes Gewicht, weil zu den Zielen einer *vertieften* Allgemeinbildung gehört, sich

– der Verantwortung für das eigene Lernen und

– der Relativität des Wissens

bewusst zu sein.

Für die Entwicklung einer ‚guten‘ Unterrichtskultur ist es daher unverzichtbar,

- geeigneten Formen *explorativen Arbeitens* genügend Raum zu geben

und

- die horizontale und vertikale *Vernetzung* der Inhalte zu *realisieren*.

Für den Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe bedeutet dies,

- zum potenziellen Kristallisationspunkt innermathematischer und fächerübergreifender Projekte mit offenen Arbeitsformen zu werden (mit dem Computer als natürlichem Hilfsmittel)

und

- die drei Lernbereiche Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik miteinander zu verzahnen und sie jeweils als spezifische Fortentwicklungen einschlägiger Vorerfahrungen aus der Mittelstufe sehen zu lernen.

Da individuelle Sinnkonstruktionen für erfolgreiche Lernprozesse konstituierend sind, hat der *Umgang mit Fehlern* eine Schlüsselrolle für die Unterrichtskultur. Zur Auffassung von der Mathematik als Prozess gehört, Schülerfehler nicht reflexartig als Zeichen mangelnder Produktbeherrschung zu begreifen, sondern als prinzipiell willkommener Anlass für konstruktive Einsichten und Verbesserungen. In der gymnasialen Oberstufe kann die Erfahrung, durch Fehler klug zu werden, in beträchtlichem Maße zur Studierfähigkeit beitragen.

Eine förderliche Fehlerkultur stärkt die subjektivistischen Aspekte des Lernens von Mathematik und ist ein wirksames Mittel gegen das Phänomen der Sprachlosigkeit im Mathematikunterricht. Die Fehlerkultur ist der Schlüssel für die Realisierung der Leitlinie (L3).

Grund- und Leistungskurse

Nach breit geteilter Auffassung dient die mathematische Grundbildung dem Aufbau eines „kognitiven und motivationalen Fundaments, das nachfolgendes Lernen trägt“ (BLK 1997). Hierzu gehören einerseits ein sicheres Grundwissen und ein breites, vernetztes Orientierungswissen, andererseits Bewusstheit gegenüber der Bedeutung und Reichweite der Mathematik sowie eine positive Einstellung zum Fach. (Hinter dieser Auffassung steht die pädagogische Position, dass nicht formale Schlüsselqualifikationen, sondern nur eine ‚solide und gut organisierte Wissensbasis in der jeweiligen Domäne' erfolgreiche Lernprozesse ermöglicht, BLK 1997.)

Vor diesem Hintergrund haben wir das *Konzept der Integration der drei Grunderfahrungen* an den Anfang gestellt und postuliert, dass Grund- und Leistungskurse gleichermaßen dieser integrativen Erfahrung bedürfen (vgl. Leitlinien (L1) und (L2)). Folgerichtig unterscheidet sich der Leistungskurs konzeptionell vom Grundkurs nur durch einen *höheren Grad gedanklicher Durchdringung*, und zwar in Bezug auf

- die *innermathematische Orientierung* (Grunderfahrung (G2)), indem etwa durch lokales Ordnen die jeweilige Argumentationsbasis bewusst gemacht und explizit thematisiert wird,
- den *Modellbildungsprozess* ((G1) in Verbindung mit (G2)), indem etwa die zu diesem Prozess gehörigen Aktivitäten des Mathematisierens, Interpretierens und Evaluierens voneinander abgegrenzt und selbst zum Gegenstand der Reflexion werden,
- die *heuristische Denk- und Arbeitsweise* ((G3)), indem etwa heuristische Strategien zum Thema gemacht und auf ihre Reichweite hin untersucht werden.

Zu der historisch gewachsenen Einteilung in mathematisch-naturwissenschaftliche und sprachliche Züge ist mit der Oberstufenreform die Differenzierung zwischen Grund- und Leistungskursen gekommen. Für eine vernünftige Profilbildung sollte diese Differenzierung beibehalten werden. Keinesfalls dürfen Grundkurs - Konzeptionen durch formales Ausdünnen der Leistungskurs-Curricula gewonnen werden. Als Beispiel sei der fundamentale Begriff der Ableitung gewählt (Lernbereich Analysis):
Die Bedeutung der Ableitung in Anwendungszusammenhängen gibt ihrer Verankerung als *lokale Änderungsrate* besonderes Gewicht (Grunderfahrung (G1)). Es wird darauf ankommen, die lokale Änderungsrate einer Funktion an einer Stelle als verstehen zu lernen, die am Ende einer Kette quantitativer Beschreibung des Änderungsverhaltens einer Funktion steht: vom aktuellen Bestand über den absoluten und relativen Zuwachs zur lokalen Änderungsrate. Jede Etappe dieser Kette erfordert eigene Anstrengungen bei der Interpretation in Sachzusammenhängen. Grund- und Leistungskurse müssen sich gleichermaßen dieser Herausforderung stellen. Der Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate ist in kinematischen Kontexten vergleichsweise unproblematisch, weil der funktionale Weg-Zeit-Zusammenhang sich in intuitiver Weise des Zeitkontinuums bedient. Spannend wird es, wenn die Funktion von Hause aus auf einem diskreten Größenbereich operiert und die Ableitung zu einer (idealisierten)
führt, die im Sachkontext weder messbar noch interpretierbar ist. Dies tritt zum Beispiel bei funktionalen Zusammenhängen im wirtschaftlichen Bereich ein und ist dort auch elementar thematisierbar. Die Gegenüberstellung solcher Beispiele aus dem „kontinuierlichen" bzw. „diskreten" Umfeld gehört zum Kern einer phänomenologisch orientierten Erstbegegnung mit dem Ab-

leitungsbegriff. Hier lässt sich das für die Mathematik (und insbesondere für die Analysis) charakteristische Spannungsverhältnis zwischen den Grunderfahrungen (G1) und (G2) konkret zum Thema machen. Dies ist eine typische Aufgabe für den Leistungskurs.

Auch die Grunderfahrung (G3) steht in direktem Zusammenhang mit dem Verständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate: Ohne eine entwickelte Heuristik ist nicht wirklich zu verstehen, warum z.B. die Umfangsformel für den Kreis durch Differentiation aus der Flächenformel hervorgeht. Und umgekehrt führt die Auseinandersetzung mit verwandten Phänomenen zur Weiterentwicklung heuristischer Fähigkeiten. Grund- und Leistungskurse bedürfen gleichermaßen solcher Beispiele, aber der Leistungskurs wird die Heuristik des Arbeitens mit kleinen Änderungen explizit thematisieren.

Wir sehen die Gefahr, dass ein gemeinsames Curriculum für Grund- und Leistungskurse einen großen Teil der Schülerinnen und Schüler überfordern und diejenigen, die eine stärkere Affinität zur Mathematik haben, unterfordern und ihnen den Übergang von der Schule zum Studium unnötig erschweren würde. So weist auch Weinert deutlich darauf hin, dass die Gefahr von Misserfolgen und Demotivation um so größer ist, je heterogener die Fähigkeiten und Leistungen in einem Fach sind (Weinert 1999).

Zusammengefasst: In Grund- wie in Leistungskursen werden Grund- und Orientierungswissen nicht isoliert (auf Vorrat), sondern in sinnstiftenden inner- und außermathematischen Kontexten erworben. Aber der Leistungskurs ist gegenüber dem Grundkurs im beschriebenen Sinne reflektierter konzipiert. Ein gemeinsames Curriculum für Grund- und Leistungskurse wäre nach unserer Überzeugung nicht geeignet, der naturgemäß unterschiedlich stark ausgeprägten Affinität zur Mathematik Rechnung zu tragen.

2. PROBLEME UND URSACHEN

Empirische Untersuchungen, die den alltäglichen Mathematikunterricht und seine Ergebnisse in der ganzen Breite an der Integration der drei Grunderfahrungen (G1)-G(3) messen und beurteilen, liegen nicht vor und sind – wenn überhaupt - nur mit großem Aufwand zu erhalten. Mit den Ergebnissen von TIMSS liegen zumindest für Teilbereiche und einzelne Jahrgangsstufen vergleichende Untersuchungen vor. Einen weiteren Einblick in realen Mathematikunterricht erhält man, indem die Ergebnisse unterschiedlicher empirischer Studien in der Mathematikdidaktik, die vielfältigen Berichte über Unterrichtserfahrungen einzelner Lehrender sowie die aktuelle fachdidaktische Diskussion unter Beteiligung von Mathematiklehrern und ihrer Verbände analysiert werden. Schließlich besitzen alle Autoren dieser Expertise langjährige Unterrichtserfahrungen am Gymnasium bzw. der ehemaligen Erweiterten Oberschule der DDR, sie sind seit vielen Jahren in der Lehrerausbildung engagiert und betreuen regelmäßig die schulpraktischen Studien der Studierenden. Die aktive Teilnahme an der theoretischen Diskussion um die Fortentwicklung des Mathematikunterrichts, persönliche Unterrichtserfahrungen, Einzelbeobachtungen und Eindr cke erlauben es, – zumindest in Teilaspekten – ein zutreffendes Bild des gegenwärtigen Mathematikunterrichts zu zeichnen. So werden im Folgenden einige zentrale Probleme des derzeitigen Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe benannt und mögliche Ursachen diskutiert.

Einseitige Orientierung an einer Grunderfahrung

Die traditionelle Unterrichtspraxis in der gymnasialen Oberstufe ist von der Integration der drei Grunderfahrungen (Leitlinie (L2)) vor allem deshalb nicht breit durchdrungen, weil eine einseitige (zumindest implizite) Orientierung an der Grunderfahrung (G2) zu einer systematischen Vernachlässigung von (G1) und (G3) geführt hat. Ursächlich hierfür ist in erster Linie das im Ansatz verfehlte Verständnis von Grundkursen als ausgedünnte Leistungskurse, die ihrerseits dem Geiste nach als ausgedünnte Versionen einschlägiger Fachvorlesungen in Reiner Mathematik des mathematischen Grundstudiums begriffen wurden. Diese Problematik wird seit den Anfängen des Kurssystems gesehen, dennoch spiegelt sie bis heute das weitgehend fachbezogene Selbstverständnis von Oberstufenlehrern.

Das betrifft vor allem die didaktisch-methodische Perspektive, unter der die fachlichen Inhalte gesehen werden. So erscheinen mit Blick auf die Grunderfahrung „Umwelterschließung“ etwa die Inhalte der Grundkurse unter geometrischem Aspekt zu dürftig, wenn dort die geometrischen Objekte weitgehend auf lineare Gebilde in der analytischen Geometrie und Funktionsgraphen in der Analysis beschränkt bleiben. Hier hat die schon vor langem erfolgte Herausnahme der Kegelschnitte und der Kurven aus den Lehrplänen zu einer deutlichen Verarmung an solchen geometrischen Objekten geführt, die für alle drei Grunderfahrungen genügend reichhaltig sind. Gerade die Möglichkeiten neuer Technologien bei der Visualisierung und Dynamisierung geometrischer Objekte könnte Zugänge zu diesem Themenbereich wieder nachhaltig unterstützen. Ferner ndern eröffnete Möglichkeit der Auswahl zweier Abiturfächer (aus den drei Gebieten Analysis, Geometrie und Stochastik) dazu geführt, dass der Stochastik eine zu geringe Bedeutung beigemessen wird.

Orientierung am Kalkül

Nach den Ergebnissen von TIMSS liegen die relativen Stärken deutscher Oberstufenschülerinnen und -schüler im internationalen Vergleich „eher bei der Lösung von Aufgaben, die Routineprozeduren der Oberstufenmathematik oder reines Begriffswissen repräsentieren“ (Baumert/Bos/Watermann 1999, S. 104 f.). Detaillierte mathematikdidaktische Analysen von Ergebnissen bei TIMSS sowie der Formate und der Anforderungsart der dort eingesetzten Items zeigen andererseits, dass die deutschen Schülerinnen und Schüler im Vergleich zu denen einiger anderer Länder weniger gut mathematisieren, argumentieren oder mit Nicht-Routine-Aufgaben umgehen (Wiegand 1999). Die relativen Stärken und Schwächen deutscher Schülerinnen und Schüler spiegeln die allgemeine Schwerpunktsetzung im Grundkursunterricht. Diese Feststellung harmoniert übrigens auch mit Ergebnissen einer Vergleichsstudie zum englischen und deutschen Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und zu den Leistungen englischer und deutscher Lernender (Kaiser 1997, Kaiser/Blum/Wiegand 1997).

Nun ist die starke Konzentration der Stofferarbeitung und des Übungsgeschehens auf die Beherrschung von Kalkülen und Routinen schon des Öfteren kritisiert worden (etwa Andelfinger 1990). Wir möchten deutlich auf diesen Mangel hinweisen, da er die angestrebte Integration der drei Grunderfahrungen systematisch behindert.

Nicht selten erfolgt das Üben sinnentleert, werden die Formeln und Kal nnen und Schülern ohne Einsicht angewandt. Inhaltliche und begriffliche Probleme geraten dann leicht aus dem Blick und werden, wenn die zugehörigen Prüfungsaufgaben auch auf kalkülhafte Aufgaben beschränkt bleiben, für unbedeutend erachtet. Die Bereitschaft, das Erlernte auf neue inner- oder außermathematische Situationen anzuwenden, bleibt unterentwickelt. Es besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler selbst einfachen Problemaufgaben ratlos gegenüber stehen, weil sie über die Erarbeitung und Einübung rechnerischer Routinen nicht gelernt oder weitgehend verlernt haben, inhaltliche und den Einzelheiten des konkreten Falls angepasste Überlegungen anzustellen.

Die starke Betonung der Kalküle und Routinen wird auch angesichts möglicher Nutzung von Rechnern mit Computeralgebra–Systemen in Frage gestellt. Ganze Teile bisheriger Schulmathematik – wie z. B. die klassische Kurvendiskussion im Analysisunterricht – können sich durch den Einzug des Rechners im Sinne der von uns aufgezeigten Leitlinien grundlegend verändern.

Ursachen der Kalkülorientierung

Wo liegen die Ursachen für die starke Konzentration auf Kalküle und Routinen? Zum einen ist zu sehen, dass die Bereitstellung und Nutzung algorithmischer Methoden fraglos eine wichtige Seite der Mathematik und eine Grundlage ihrer Erfolge darstellt. Dies trifft insbesondere auch für diejenigen Bereiche der höheren Mathematik zu, die in Grundkursen thematisiert werden. In der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik wurden entscheidende Fortschritte bei der Behandlung ihrer Probleme dadurch erreicht, dass Einzelbetrachtungen durch immer allgemeinere, systematische Methoden ersetzt und letztlich in Kalkülen umgesetzt wurden. So lernen die Sch lerinnen und Schüler mit den Kalkülen der Infinitesimalrechnung ein mächtiges Werkzeug kennen. Ableitung und Integrale von Funktionen lassen sich damit – zumindest bei den in der Schule behandelten Funktionen - verhältnismäßig leicht berechnen, sofern man nur einige einfache Regeln beherrscht und richtig anwendet. Ein anderes Beispiel ist die Behandlung von Objekten und Operationen, bei der geometrische Probleme durch algebraische Ausdrücke dargestellt und auf das algorithmische Lösen von Gleichungssystemen zurückgeführt werden.

Die Verwendungsbezüge dieser Methoden beim Studium von Natur- oder Technikwissenschaften legitimieren nach wie vor diese Inhalte, so dass das kalkülhafte Arbeiten ein zentraler Punkt des Unterrichts sein muss. Eine gewisse Kompetenz darin ist gerade auch für eine sinnvolle Rechnernutzung erforderlich.

Im Unterricht verführen diese Kalküle aber leicht dazu, dem bloßen routinierten Vollzug der Methoden zu viel Gewicht beizumessen, so dass schließlich die Vermittlung normierter Kenntnisse und Verfahren sowie deren konforme Anwendung auf bestimmte Aufgabentypen im Zentrum stehen. Beispielsweise wird die schulische Analysis – deutlich sichtbar in den Abituraufgaben - von drei Aufgabentypen beherrscht: Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben, Flächen- und Volumenberechnungen. Eine Reihe von Aufgabengruppen, die sich nach einem durchgängigen Muster lösen lassen, wird systematisch behandelt und eingeübt, u. a. auch unter dem Aspekt der Bereitstellung von „Musteraufgaben“ für das Abitur. Dies hat etwa G. Schmidt bereits 1992 auf einer Podiumsdiskussion der MNU zum Thema „Quo vadis Analysisunterricht?“ deutlich kritisiert: „Gemessen an den allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts und auch den in den Lehrplänen genannten Zielen speziell für die Analysis bietet die Praxis des Unterrichts häufig ein ‚Zerrbild’. Unter dem Einfluss kurzschrittiger und scheinobjektivierter Leistungsüberprüfungen dominieren die Anwendungen von (algebraischen) Kalkülen und von schematisierten Verfahren gegenüber dem angestrebten Verständnis von ‚Ideen’ und ‚Zusammenhän k-werts/Vogel 1992, S.372). Diese Tendenz ist auch für die schulische Analytische Geometrie zu erkennen, wo sich ein Kanon von Standardaufgaben aus dem Bereich der Schnitt- und Abstandsbeziehungen herausgebildet hat. Wir erkennen durchaus den Wert derartiger Aufgaben, möchten aber auf die Einseitigkeit solcher Übungen mit ihren eher schematischen Bearbeitungsanforderungen in der gängigen Prüfungspraxis hinweisen, wenn andere Aufgabentypen von stärker inhaltlicher Orientierung ausgeklammert werden. Lernen von Mathematik ist nicht nur das Einüben von Kalkülen.

Die Gründe für die starke Konzentration auf Kalküle und Routinen sind Untersuchungen zufolge (Grigutsch/Raatz/Törner 1998) nicht etwa in den einseitigen Vorstellungen von Mathematik bei Mathematiklehrern zu suchen. Vielmehr ist es häufig so, dass die Lehrer ein differenziertes Bild von der Mathematik als Fachgebiet besitzen, sie für nützlich und anwendbar in der Wirklichkeit halten, ihr Wesen geprägt sehen sowohl von formaler Strenge und Exa a-thematik“ in Form von Regeln, Algorithmen und Schemata als auch von problembezogenen Prozessen des Verstehens und Entwickelns. Im durchschnittlichen Mathematik-Bild der Lehrer wird der Prozess- und Anwendungsaspekt der Mathematik relativ hoch eingeschätzt und der Aspekt des Schematischen eher gering bis ablehnend beurteilt.

So ist die Konzentration auf Kalküle und Routinen wohl vor allem als Strategie des Lehrers anzusehen, um trotz Schwierigkeiten und teils geringer Anstrengungsbereitschaft bei Lernenden Sicherheit in der Durchführung der mathematischen Methoden zu erreichen. Deren Ausführung stellt die Lernenden ja, auch bei Standardaufgaben, vor relativ komplexe Anforderungen; z. B. erfordern die im Analysisunterricht kalkülmäßig zu bearbeitenden Aufgabenklassen umfangreiche algebraische Umformungen mit fehleranfälligen Rechnungen sowie Kenntnisse bei Inhalten, die in der Sekundarstufe I in verschiedenen Lernbereichen isoliert behandelt und geübt wurden (z. B. Distributivgesetz, Potenzgesetze, quadratische Gleichungen, Satzgruppe des Pythagoras, Ähnlichkeitslehre, Trigonometrie).

Empirische Untersuchungen (Grigutsch 1995, ders. 1998) geben Hinweise darauf, dass sich die Schwerpunktsetzung des Unterrichts in einem entsprechenden Bild von Mathematik bei den Oberstufenschülern niederschlägt. Danach ist von Klasse 9 zu Klasse 12 eine Differenzierung bzw. Polarisierung der Einstellungen gegenüber Mathematik zu beobachten. Bei Lernenden im Grundkurs ist eine Tendenz zu einer eher „statischen“ Sicht von Mathematik festzustellen, wonach ihr Wesen von formaler Strenge und Exaktheit, von „fertiger Mathematik“ in Form von Regeln, Algorithmen und Schemata geprägt ist, während Lernende im Leistungskurs die Mathematik stärker „dynamisch“, als einen problembezogenen Verstehens- und Erkenntnisprozess sehen und von ihrem Nutzen überzeugt sind.

Der Ausbildung adäquater Grundvorstellungen im Unterricht mehr Aufmerksamkeit zu widmen, verlangt die begrifflichen Probleme der Lernenden, ihre Begriffs- und Verfahrensvorstellungen in den Mittelpunkt zu rücken. Demgegenüber kann in der Praxis immer wieder beobachtet werden, dass Idee und Bedeutung eines mathematischen Konstrukts und dessen formale mathematische Darstellung und technische Durchführung laufend vermischt werden (Ableitung versus

Ableiten, Integral versus Integrieren, Idee der Approximation von Nullstellen durch das Newtonverfahren versus Ausführen des Newtonverfahrens mit einem Taschenrechner usw.).

Unterrichtsmethode

Der erwünschten Orientierung steht, wie die Video-Analysen aus TIMSS zeigen, auch das „Script“ der Engführung des Mathematikunterrichts entgegen. Man kann begründet daran zweifeln, dass diese Unterrichtsweise eine aktive Sinnkonstruktion mathematischer Inhalte durch die Lernenden ausreichend unterstützt. Sie zeigen, dass der traditionelle Mathematikunterricht - in einem höherem Ausmaß als es der bloße Eindruck oder globale Unterrichtsbeobachtungen bis dahin vermuten ließen - von Interaktionsroutinen geprägt ist, die für die Beteiligten mehr oder weniger unbemerkt ablaufen. Eine der verschiedenen typischen Routine ist z. B. das so genannte "Trichtermuster", bei dem immer engere Fragestellungen des Lehrers im Zuge kurztaktiger Frage-Antwort-Abfolgen den Lernenden schließlich dazu bringen, eine Handlungserwartung des Lehrers zu erfüllen, ohne dass dieser Prozess seitens des Lernenden mit Verständnis oder Einsicht in die entsprechenden Sachstrukturen verbunden sein muss.

Mit Blick auf die Notwendigkeit der aktiven Sinnkonstruktion mathematischer Inhalte erscheint im derzeitigen Mathematikunterricht der Raum für Eigenaktivitäten der Lernenden viel zu eng, der Lehrplan inhaltlich überfrachtet, und den Schülerinnen und Schülern fehlen Gelegenheit und Muße zu eigenständiger Auseinandersetzung mit Mathematik.

Das Lernen betrifft häufig nur einen gerade anstehenden oder eben abgeschlossenen Stoff. Leistungskontrollen sind eng auf ihn bezogen. Kumulatives Lernen erfordert das Bearbeiten von Aufgaben, die Hilfsmittel aus mehreren, mathematischen und ggf. auch außermathematischen Gebieten verlangen. Eine horizontale und vertikale Vernetzung von Inhalten ist aber zu wenig gewährleistet. So sind auch Leistungsfortschritte von einer Jahrgangsstufe zur nächsten im Grundkurs kaum erfahrbar, die Stoffe sind curricular nicht entsprechend angeordnet.

Kurz: Die etablierte Unterrichtsmethode erschwert konstruktives und kumulatives Lernen. In den Kontext dieser Einschätzung gehören fallstudienartige Interviews, in denen die befragten Lehrer mehrheitlich die Arbeitshaltung und Motivation der Lernenden in Grundkursen als schlecht beurteilten und meinten, dass es dort nicht wenige Schülerinnen und Schüler geben würde, die nur Minimalanforderungen nachkommen wollten. Zusätzliche Probleme entstünden auf Grund von Defiziten in mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten aus der Sekundarstufe I (Tietze 1986, ders. 1992).

Nun ist aus empirischen Studien zur Einstellung gegenüber Mathematik von Schülerinnen und Schülern bekannt, dass sich das in Klasse 6 noch positive Selbstbild als Mathematik-Lerner mit den weiteren Schuljahren verschlechtert, so dass gegen Ende ihrer Schulzeit nur noch Schülerinnen und Schüler im Leistungskurs ein positives Selbstbild haben. Die Entwicklung des Selbstbildes für Schülerinnen und Schüler des Grundkurses kann als Distanzierung von der Mathematik gedeutet werden. Diese Tendenz wird auch noch durch die Gewichtung von Grundkursen unterstützt, denn ein Bemühen in den Grundkursen schlägt sich im Verhältnis zu den Leistungskursen wesentlich geringer in der Abiturnote nieder, es erscheint daher Schülerinnen und Schülern taktisch günstiger, den größten Teil der Arbeitszeit und des Engagements auf die gewählten Leistungskurse zu verwenden.

Zusammengefasst: Das Bild von der Mathematik und das Selbstbild werden durch die beschriebenen Problemfelder (einseitige Orientierung am Kalkülaspekt der Disziplin Mathematik sowie die etablierte Unterrichtskultur) ungünstig beinflusst. Angesichts spürbar veränderter Schülerpopulationen am Gymnasium wächst allerdings die Akzeptanz für Neuorientierungen, zumal die skussion um TIMSS den Blick auf die Schulrealität nachhaltig geschärft hat.

3. MASSNAHMEN

Wir sind überzeugt, dass die drei *klassischen Stoffgebiete* auch zukünftig zentrale Bedeutung für die gymnasiale Oberstufe besitzen müssen:

- *Analysis* als Grundlage fundamentaler mathematischer Begriffe wie Funktion, Grenzwert, Änderungsrate zur Beschreibung veränderlicher Prozesse,
- *Analytische Geometrie* mit ihren mächtigen Methoden und interessanten Objekten zur Erschließung des uns umgebenden Raumes,
- *Stochastik* aufgrund der eher noch zunehmenden Bedeutung von deskriptiver und beurteilender Statistik und von Wahrscheinlichkeitsaussagen in allen Bereichen des täglichen Lebens.

Im folgenden sollen einige zentrale Orientierungen für den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe und insbesondere der Grundkurse aufgezeigt werden, die sowohl für die Auswahl der Inhalte als auch für die methodische Gestaltung des Unterrichts gedacht sind.

3.1 Inhalte

Im Sinne der Leitlinie (L2) ist die Auswahl der Inhalte in den drei Lernbereichen der Forderung unterworfen, zu den drei Grunderfahrungen (G1) bis (G3) gleichermaßen beitragen zu können. Dafür gibt es gewissermaßen Qualitätskriterien, deren Beachtung eine
wahrscheinlicher macht. Zu diesen Kriterien gehören die Orientierung an *fundamentalen Ideen*,

der Grundgedanke der inhaltlichen *Vernetzung*, die Priorität für den Aufbau von *Grundvorstellungen* sowie die *Anwendungsorientierung*.

Orientierung an fundamentalen Ideen

Der Unterricht in den drei Lernbereichen muss an fundamentalen Ideen orientiert sein und als Schwerpunkt den Aufbau adäquater Grundvorstellungen der zentralen Begriffe und Methoden haben. Zu den fundamentalen Ideen gehören Messen, funktionaler Zusammenhang, Algorithmus, Iteration, Änderungsraten, Optimieren, räumliches Strukturieren, Koordinatisieren, Symmetrie, Zufall und Wahrscheinlichkeit. Zum Aufbau von Grundvorstellungen ist es notwendig, dass bewusst die kalkül-orientierten Teile in Zeitaufwand und Wertigkeit zu Gunsten der inhaltlich orientierten Teile reduziert werden. Bei Begriffsbildungen und Begründungen sollte stärker inhaltlich und nicht ausschließlich formal argumentiert bzw. es sollte das formale Ergebnis stets auf Sinnhaltigkeit abgefragt werden.

Vernetzung als Orientierungsgrundlage

Die Auswahl der Inhalte in den drei Lernbereichen muss sich an deren Bedeutungs- und Beziehungshaltigkeit orientieren. Dabei ist es wichtig, dass den Lernenden zum einen die vertikalen Vernetzungen innerhalb der einzelnen Gebiete, die „roten Fäden“, deutlich werden, dass sie aber auch die horizontalen Vernetzungen zwischen den einzelnen Teilgebieten erkennen (vgl. etwa Vollrath 1984). Ein typisches Beispiel für einen "roten Faden" ist die Prozentrechnung: von propädeutischen Erfahrungen in der Primarstufe über absolute und relative Anteile bis zu mittleren
- im übrigen auch anwendungsrelevantem - Fundament der Analysis. Andere Beispiele wären Begriffe wie Zahl, Funktion, Gleichung, (geometrische) Abbildung, Flächeninhalt oder Wahrscheinlichkeit. Ein Teilgebiet, das sich in besonderer Weise für horizontale Vernetzungen eignet, ist die Stochastik. So benötigen explorative Datenanalyse und elementare Wahrscheinlichkeitsaussagen als mathematischen Kalkül wieder die Prozentrechnung sowie die Bruchrechnung. In der Sekundarstufe II kann der Bereich Verteilungen äußerst fruchtbar die Gebiete Analysis und Stochastik verzahnen, wobei insbesondere der Funktionsbegriff jeweils gebietstypische Ausprägungen als Funktionen einer (oder mehrerer) Variablen, geometrische Abbildungen, Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen erfährt. Dabei sollten auch Funktionen mehrerer Variablen nicht nur versteckt als kalkülorientierte Funktionen einer Variablen mit Parametern vorkommen, sondern - in qualitativer Weise eingeführt und behandelt - auch für das bessere Verständnis naturwissenschaftlicher Modellbildung zur Verfügung stehen. Wiederum lassen sich Beziehungen zur Geometrie herstellen, indem Graphen als Flächen und Kurven auftreten. Neue Technologien können hierbei unterstützend helfen.

Auf eine isolierte Axiomatisierung des Vektorraums mit der Reduzierung auf lineare geometrische Gebilde sollte zugunsten einer an die Geometrie der Sekundarstufe I anknüpfenden inhaltlich orientierten analytischen Geometrie des uns umgebenden Raums verzichtet werden. Auch hier sollte viel stärker die Vernetzung von Analysis und Analytischer Geometrie hervortreten, indem etwa Kurven und insbesondere die Kegelschnitte wieder zentrale Objekte des Mathematikunterrichts werden. (vgl. Schupp 2000)

Grundvorstellungen versus Kalkülorientierung

Erst auf der Grundlage eines inhaltsbezogenen *und* verständnisorientierten Unterrichts kann weiter exaktifiziert und formalisiert werden. Dabei ist die deutliche Trennung notwendig zwischen der Idee und Bedeutung eines mathematischen Begriffs oder entsprechender Grundvorstellungen über mathematische Verfahren einerseits und dem kalkülhaften Umgang damit andererseits.

Idee und Bedeutung	**Kalkülhaftes Arbeiten**
Ableitung als Idee des Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate	Bestimmen von Tangentensteigungen und Ableitungsfunktionen nach syntaktischen Regeln
Integral als Idee der Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Änderungsraten	Integrieren zum konkreten Bestimmen von Flächeninhalten und von Stammfunktionen nach syntaktischen Regeln
Idee der Approximation von Nullstellen durch das Newtonverfahren (oder ein anderes Iterationsverfahren) sowie die Analyse des Konvergenzverhaltens	Ausführen des Newtonverfahrens mit einem Taschenrechner oder mit Hilfe eines Computers und entsprechende Abbruchbedingungen „wenn sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert“
"Kurvendiskussion" als kompetente Analyse der Eigenschaften von Funktionen	"Kurvendiskussion" als Anwendung von Kalkülen auf Funktionen und deren Ableitungen
Darstellung geometrischer Gebilde (Geraden, Ebenen, Kreise, Ellipsen, ...) mit Hilfe analytischer Methoden	Formales Lösen von Gleichungssystemen
Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffe auf Alltagssituationen	Algorithmische Behandlung von Aufgaben in Urnenmodellen

Im derzeitigen Mathematikunterricht liegt der Schwerpunkt zu einseitig auf analytischen Methoden, die zu exakten, formelmäßig darstellbaren Lösungen (von Gleichungen, Integralen, Differentialgleichungen, ..) führen. Aufgrund der Existenz von Computern hat die Bedeutung von mit Papier und Bleistift durchzuführenden kalkülhaften Berechnungen abgenommen. Dagegen hat die Bedeutung numerischer, iterativer und approximativer Methoden (und ihrer Qualitätsanalyse) zugenommen. Das sollte sich auch im Mathematikunterricht widerspiegeln.

Anwendungsorientierung

Wir sind der Meinung, dass der Mathematikunterricht realitätsnäher werden muss und Anwendungen der Mathematik verstärkt realitätsadäquat in den Unterricht einzubeziehen sind. In unserem heutigen komplexen Alltag werden Anwendungen der Mathematik immer vielfältiger, für den Einzelnen wird dieses aber immer weniger erkennbar, da die Mathematik in technischen Geräten und Computerchips versteckt ist. Der Mathematikunterricht sollte etwas dazu beitragen, hinter diese technischen Kulissen zu schauen. Mathematische Modellierung bedeutet das bewusste Durchlaufen des Modellbildungskreislaufs mit Problembeschreibung, mathematischer Modellierung, Durchführung der Modellrechnungen, Interpretation und Validierung der Ergebnisse sowie Erkennen und Aufzeigen der Grenzen der Modellbildung. Im Sinne der Doppelnatur der Mathematik bedeutet es auch, den Aspekt der innermathematischen Modellierung bewusst zu machen. Dies alles müssen Lernende an konkreten Beispielen selbst erleben. Hierfür reicht das lediglich Lösen von sogenannten Anwendungsaufgaben der Schulbücher nicht aus**,** da sie sich im wesentlichen auf der mathematischen Seite des Modellbildungskreislaufs aufhalten. Konstruktive Beiträge zu einem realitätsorientierten Unterricht wurden in neuerer Zeit von den Gruppen ISTRON[1] und MUED[2] geleistet.

3.2 Methoden

Im Sinne der Leitlinie (L3) müssen die Unterrichtsmethoden danach beurteilt werden, inwieweit sie der Eigenaktivität der Schüler genügend Raum geben. Hierzu gehören als konzeptionell wirksame Maßnahmen die Schaffung *produktiver Lernumgebungen*, eine Balance zwischen *Instruktion und Konstruktion* sowie die *Öffnung von Aufgaben*.

Stärkung der Kooperation

Unsere Lehrerinnen und Lehrer sind im allgemeinen fachlich gut ausbildet, was auch in TIMSS deutlich betont wird. Sie besitzen aber ein eher implizites Handlungswissen, das bewusster gemacht werden muss, wenn es selbst Gegenstand einer kritischen Reflexion werden soll. Hierzu gehört auch, dass die Kooperation zwischen Lehrern gefördert wird, um dem gerade bei Mathematiklehrern verbreiteten "Einzelkämpfertum" entgegenzuwirken. Koo h-nen“, nicht nur als Wissenszuwachs für den Einzelnen, sondern auch durch institutionelle und gesellschaftliche Anerkennung. Eine Stärkung des Ansehens von Schule und Lehrern durch die Politiker würde der Wertschätzung von Bildung und Erziehung in Deutschland gut anstehen.

[1] Vgl. die ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, fortlaufende Bände ab 1993 bei Franzbecker (Hildesheim).

[2] Vgl. die vielfältigen Einzelmaterialien der MUED-Initiative (Mathematikunterrichtseinheiten-Datei) in Appelhülsen.

Schülerorientierung

In der Unterrichtsrealität wird zu sehr normativ von Seiten der Mathematik her gedacht. Die Mathematiklehrpläne für die Oberstufe orientieren sich oft an derjenigen Mathematik und deren Darstellung, die an der Universität für zukünftige Mathematiker gelehrt wird, und daran, wie sie gelehrt wird. Epistemologische und subjektivistische Aspekte des Lernens von Mathematik, also die Frage, *wie* bei den Lernenden mathematisches Wissen entsteht und *wie* Lernprozesse ablaufen und *wie* dies positiv beeinflusst werden kann, werden in der Regel zu wenig berücksichtigt. Oft fehlt die klare Einsicht, dass Mathematiklernen und -verstehen nicht das Ergebnis einer Mitteilung sein kann, sondern dass hierzu eigene Rekonstruktionsbemühungen durch die Schülerinnen und Schüler unverzichtbar sind. Hierzu müssen die Schülerinnen und Schüler ernst genommen werden, d.h. ihre subjektiven Auffassungen zum jeweiligen Problem, ihre Lösungsvorschläge und ihre Fehler müssen aufgegriffen und diskutiert werden. Die Lehrenden müssen dafür sensibilisiert werden – bzw. sich selbst dafür sensibilisieren -, dass die Lernenden für erfolgreiches Arbeiten und beim Umgehen mit Anforderungen unterschiedliche Stile haben und unterschiedliche motivationale Orientierungen benötigen. Dies ist die Basis dafür, Lernenden auch mehr Selbständigkeit und Selbstverantwortung für das eigene Lernen zu geben.

Bedeutung produktiver Lernumgebungen

Die zentrale Aufgabe der Lehrenden ist die sorgfältige Planung der Lernprozesse. Dies bedeutet einen lehrergesteuerten aber schülerorientierten Unterricht, bei dem der Lehrer als Organisator von Lernprozessen agiert. Aktivitätsphasen dürfen nicht länger durch das "graue Päckchen-Üben" bestimmt sein, das aus einer Vielfalt beziehungslos aneinandergereihter Aufgaben eines bestimmten Typs mit meist genau festgelegtem äußeren Format besteht, bei denen das gerade eingeführte Verfahren eingeübt wird. Vielmehr gehört zur Planung von Lernprozessen die Konstruktion von produktiven Lernumgebungen gemäß der Wittmannschen Auffassung von Mathematikdidaktik als *design science* (Wittmann 1995). Das bedeutet insbesondere, dass in Aufgabenfeldern geübt wird, die untereinander vernetzt sind, bei denen von den Lernenden eigene Entscheidungen über die anzuwendenden Methoden getroffen werden müssen, bei denen ein Gebiet exploriert wird und sich Spielräume für die Eigentätigkeit öffnen und bei denen verschiedene Lösungsmöglichkeiten bestehen. Die Beschränkung auf den „gerade aktuellen Stoff“ muss gelockert, Wissensteile sollten miteinander vernetzt und Lernen kumulativ verlaufen. In den Erarbeitungs- und Übungsphasen sollten induktive Aspekte wie Probieren und Experimentieren, Verifizieren und Falsifizieren von Vermutungen, Betrachten von Sonderfällen, Grenzfällen und Fallunterscheidungen usw. viel stärker betont werden. Es muss das Ziel sein, durch selbstorganisiertes Lernen sowohl automatisches Beherrschen grundlegender Techniken und Kalküle als auch die Ausbildung von Verständnis zu fördern.

Instruktion und Konstruktion

Beim selbständigen, aktiven Problemlösen steht das inhaltliche, nicht standardisierte Argumentieren im Vordergrund. Allerdings sind Einzel-, Gruppen- oder Teamarbeit nicht *a pri*ori besser als der traditionelle fragend-entwickelnde Unterricht**.** Der direkten Unterweisung durch den Lehrer wird auch zukünftig eine besondere Bedeutung zukommen (vgl. etwa Weinert 1999) und bei Unterrichtsformen wie Projektarbeit oder Freiarbeit ist die Gefahr des Dilettantismus nicht zu übersehen. Im Unterricht bedarf es der fruchtbaren Balance zwischen Instruktion (der Schüler durch den Lehrer) und Konstruktion (durch der Schüler selbst, vgl. Hefendehl-Hebeker 2000). Gegen Forderungen nach "allgemeinen Kompetenzen" oder „Schlüsselqualifikationen“ wie Denken in Zusammenhängen, Argumentationsfähigkeit, Teamfähigkeit usw. ist prinzipiell nichts einzuwenden, sie müssen aber hinterfragt und an konkreten Inhalten verdeutlich werden, wenn sie für den Unterricht fruchtbar werden sollen. Nicht zu Unrecht weist Weinert (1999) auf die "Unschärferelation" bei den "allgemeinen Kompetenzen" hin: je allgemeiner diese Kompetenzen sind, desto geringer ist ihr Nutzen für die Lösung spezifischer, anspruchsvoller Probleme.

Aufgaben öffnen, Lösungswege vervielfachen

Bei der Analyse japanischer Unterrichtsmethoden hat sich insbesondere eine Vorgehensweise als äußerst konstruktiv und produktiv erwiesen. Diese Methode lässt sich kurz durch die vier typischen Unterrichtsphasen beschreiben:

1. Phase: *Auftragsübergabe* (die Problemstellung wird vom Lehrer erläutert, ohne aber irgendwelche Lösungs- oder Methodenhinweise zu geben).
2. Phase: *Selbständig-produktives Erschließen* (einzeln oder in Gruppen arbeiten die Schüler am gestellten Problem).
3. Phase: *Präsentations-Situation* (einzelne Schüler präsentieren ihre Ergebnisse; die verschiedenen Lösungswege werden diskutiert) .
4. Phase: *Besprechungs-Situation* (der Lehrer fasst die Ergebnisse zusammen, ergänzt, klärt, vertieft, ..)

Damit werden verschiedene Ziele verfolgt: Entwickeln von Eigenständigkeit bei Problemsituationen, Teamfähigkeit, Kommunikations-, Argumentations- und Präsentationsfähigkeiten, Fähigkeiten verschiedene Lösungswege zu vergleichen und zu beurteilen. Auch diese Methode hat wie alle Methoden – ihre Grenzen, vor allem dann, wenn sie zu häufig eingesetzt wird. Die Ergebnisse aus den TIMSS-Videostudien sollten uns aber dafür sensibilisieren, abwechselnden Unterrichtsmethoden (wieder) mehr Beachtung zu schenken.

3.3 Integration neuer Technologien

Aufgrund der voranschreitenden Internetausstattung in Klassenräumen und der kostengünstiger werdenden Projektionsmöglichkeiten von Computerbildern werden in den nächsten Jahren externe Internetressourcen und computerunterstützte Visualisierungen verstärkt auch im Klassenzimmer möglich sein. Das Medium Computer wird – wie es heute bereits vielfach an Hochschulen üblich ist – zur visuellen Unterstützung von Lernprozessen beitragen. Im Hinblick auf die Veränderung von Zielen, Inhalten und Methoden des Unterrichts wird der Computer als Werkzeug in der Hand des Schülers von entscheidender Bedeutung werden. Dabei gehen wir davon aus, dass zukünftig jedem Schüler ein Werkzeug in Form eines Klein- oder Taschencomputers jederzeit an seinem Arbeitplatz zur Verfügung stehen wird. Diese Tendenz hat in den 70er Jahren mit der Entwicklung der arithmetischen Taschenrechner begonnen, setzte sich in den 80er und 90er Jahren mit graphischen Taschenrechnern fort, und ist heute bei computeralgebrafähigen Taschenrechnern angelangt. Diese Rechner haben ein Computeralgebrasystem eingebaut, das alle kalkülhaften Berechnungen des Algebra- und Analysisunterrichts auf Knopfdruck durchzuführen vermag.

Nun gibt es mittlerweile viele Unterrichtserfahrungen und einige fundierte empirische Untersuchungen zum Einsatz von Graphischen Taschenrechnern und Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht (vgl. WEIGAND 1999). So wurden verschiedene „DERIVE“-Projekte[1] in Österreich, Frankreich, England und den USA durchgeführt, die jetzt großenteils als „TI-92“-Projekte[2] weitergeführt werden. In vielen Bundesländern Deutschlands gab und gibt es Pilotprojekte, in Baden-Württemberg wurden ganze Klassen mit Notebooks ausgestattet, auf denen das Computeralgebra-System „Maple“ installiert war**,** und es wurde auch bereits das Abitur damit geschrieben. Graphische Taschenrechner sind mittlerweile in vielen Ländern in Prüfungen erlaubt, etwa in Frankreich, Holland und England, als erstes deutsches Bundesland hat Sachsen graphische Taschenrechner ab Klasse 8 verpflichtend eingeführt.
Diese Erfahrungen mit dem Computereinsatz im Unterricht haben hinreichend gezeigt, dass die gegenwärtig weitgehend akzeptierten Ziele des Mathematikunterrichts wie etwa Probleme lösen lernen, heuristische Strategien kennen lernen, Begriffe bilden, Beweisen oder Mathematisieren lernen**,** durch den Computer-Einsatz nicht hinfällig werden, sondern in gleicher Weise uneingeschränkt gültig bleiben. Der Einsatz des Werkzeugs Computer kann aber dazu beitragen, dass diese Ziele besser - ggf. auch nur anders - erreicht werden als bisher. Sicherlich wird es langfristig zu einer Neubewertung oder Neugewichtung mancher Ziele kommen, wozu insbesondere auch die Ideen der Informatik, des Informatikunterrichts und der informationstechnischen Grundbildung beitragen. Dabei sollte bedacht werden, dass viele fundamentale Ideen der Informatik wie strukturierte Zerlegung, Modularisierung, Algorithmierung, Beziehung von Syntax und Semantik (SCHWILL 1993) auch zentrale Ideen des Mathematikunterrichts sind. Die Diskussion um die Bedeutung der Informatik in der Schule sollte als Chance verstanden werden, diese Ideen auch im Mathematikunterricht wieder stärker zu betonen (vgl. hierzu HISCHER und WEIGAND 1999). Nach den bisherigen Erfahrungen besteht keine Notwendigkeit, neue Inhalte in den Mathematikunterricht zu integrieren, sondern der Zeitgewinn etwa aufgrund der geringeren Bedeutung von Termumformungen sollte dazu genutzt werden, größeren Wert auf das Entwi-

[1] Derive war das erste auf einem PC lauffähige hinreichend mächtige Computeralgebra System. Es wird jetzt von der Firma Texas Instruments weiterentwickelt und vertrieben.
[2] TI-92 war der erste Taschencomputer mit integriertem Computeralgebra-System. Mittlerweile gibt es entsprechende Geräte von den Firmen Casio und Hewlett Packart.

ckeln von Grundvorstellungen zu legen und auch weiter zurückliegende Inhalte evtl. unter einem neuen Aspekt – systematisch im Kontext aktueller Probleme zu wiederholen.

Für den zukünftigen Einsatz Neuer Technologien im Unterricht sehen wir folgende Perspektiven:

- Für das Arbeiten mit Internet und Lernprogrammen sowie mit Programmen vor allem zur zwei- und dreidimensionalen Geometrie werden Computerräume mit einer guten Multimediaausstattung in den nächsten Jahren noch unentbehrlich sein. Allerdings wird das Arbeiten mit Taschencomputern – bei zu erwartenden fallenden Preisen und höherer Qualität dieser Rechner - eine immer größere Bedeutung erlangen. Graphische Taschenrechner oder/und Computeralgebra-Systeme werden im Mathematikunterricht der Oberstufe zu obligatorischen Hilfsmitteln werden.
- Beim Arbeiten mit dem Taschencomputer werden von den Lernenden vielfältige Kompetenzen in verstärktem Maße auszubilden sein: Erkennen von Termstrukturen, Visualisieren von Gleichungen und Ungleichungen, Überprüfen der vom Rechner gelieferten Ergebnissen, und schließlich die Kompetenz einer sinnvollen Benutzung (nicht nur Bedienung) des Werkzeugs Computer. Es werden aber weiterhin auch Fertigkeiten notwendig sein, die ohne elektronische Hilfsmittel ausgeführt werden können sollten, wie etwa einfache Termumformungen, ichungen und Skizzieren von Graphen.
- Der Rechner wird von den Lernenden nur dann als ein zentrales und bereicherndes Werkzeug zum Lernen von Mathematik verstanden werden, wenn er bei Bedarf auch tatsächlich zur Verfügung steht, also sowohl bei Haus- und Schularbeiten als auch bei Prüfungen. Dies schließt nicht aus, dass der Rechner in Unterrichtsphasen bewusst und begründet nicht erlaubt wird. Dies gilt auch für Prüfungen, die das Ziel haben, das Vorhandensein von Grundfertigkeiten zu kontrollieren.
- Schülerbezogene Arbeitsformen wie Partner-, Gruppen- und Projektunterricht, Förderung von Selbstständigkeit und Selbstverantwortung, entdeckender Unterricht, umwelterschließender Unterricht, alles das sind Forderungen, die zumindest seit der Reformpädagogik an die Schule herangetragen werden. Erfahrungen zum Computereinsatz geben heute zu der Hoffnung Anlass (etwa NOCKER 1996), dass neue Technologien ein Katalysator für eine solche „neue Unterrichtskultur“ sein können.

Die Bedeutung des Computers im Hinblick auf die Veränderung des Unterrichts sollte aber nicht überschätzt werden. Der Computer ist kein Werkzeug, mit dem „allen alles gelehrt“ werden kann. Die Diskussion um den Taschenrechner in den 70er und 80er Jahren hat gezeigt, dass alleine gutgemeinte Unterrichtsvorschläge keine Veränderungen im Mathematikunterricht bewirken, dass hierzu vielmehr das Zusammenspiel verschiedener Komponenten zu berücksichtigen ist, wie Akzeptanz bei Lehrerinnen und Lehrern, eine fundierte Lehreraus- und –weiterbildung sowie eine kritische Überprüfung und Evaluierung des Unterrichts. So ist heute vorauszusagen, dass der Computereinsatz den Mathematikunterricht verändern wird, dass es aber evolutionäre und keine revolutionären Veränderungen sein werden.

3.4 Folgerungen für die Lehrerbildung

Die vorgeschlagenen Maßnahmen und Veränderungen berühren jede der drei relevanten Phasen der Lehrerbildung, die *universitäre Phase*, den *Vorbereitungsdienst* und das *Lernen im Beruf* (Lehrerfortbildung).

Universitäre Phase

Das Prinzip der Integration der drei Grunderfahrungen beschreibt eine fachdidaktische Orientierung, die ihren festen Platz in der fachbezogenen Mathematik-Ausbildung haben muss. Dies erfordert einen *Paradigmenwechsel* im Umgang mit der Mathematik: Nicht nur die Disziplin Mathematik, sondern gleichgewichtig die Beziehung *Mensch - Mathematik* stehen im Mittelpunkt des Interesses. Dies bedeutet keinesfalls eine Aufweichung wissenschaftlicher Ansprüche an die mathematische Ausbildung, nur muss es zu einer echten Verzahnung *fachmathematischer*, *mathematikgeschichtlicher*, *fachdidaktischer* und *unterrichtspraktischer* Kenntnisse und Erfahrungen kommen. Gerade dies sind auch zentrale Forderungen der von einer Expertenkommission der KMK herausgegebenen „Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland“ (Terhart 2000).
Das Ziel der Ausbildung liegt im Aufbau eines kognitiven *und* motivationalen Fundaments, das dem berechtigten Anspruch von SII-Lehramtsstudierenden nach fachbezogener Professionalität Rechnung trägt. Mit ihrer Brückenfunktion zwischen fachmathematischen und unterrichtspraktischen Ausbildungskomponenten wird die *Didaktik der Mathematik* zur Berufswissenschaft des Mathematiklehrers.
Die hier beschriebenen notwendigen Veränderungen der fachmathematischen Ausbildung sind schwer zu implementieren. Am aussichtsreichsten scheint die Lage an Orten mit einer starken Mathematikdidaktik. Noch komplexer wird es, wenn auch erziehungswissenschaftliche Studien konzeptionell integriert werden sollen. Hier scheinen Orte bevorzugt zu sein, die über Zentren ehrerbildung als Querstruktur verfügen.

Vorbereitungsdienst

Kernpunkt ist eine bessere Abstimmung der Ausbildungsinhalte zwischen erster (universitärer) und zweiter Phase (Referendariat). Den Grundgedanken des Beziehungsgeflechts von fachmathematischen, fachdidaktischen und unterrichtspraktischen Elementen der Ausbildung muss die zweite Phase aktiv aufgreifen und in der Reflexion des Fachunterrichts lebendig halten. Das Fachseminar Mathematik ist der natürliche Ort, Spannungen zwischen normativen Stoffbildern bei Lehrenden und individuellen Sinnkonstruktionen bei Lernenden fortlaufend zu thematisieren.
Die Entwicklung eines angehenden Mathematiklehrers der gymnasialen Oberstufe zu einem kompetenten Fachvertreter und Organisator von Lernprozessen erfordert, dass Referendar und Fachleiter eine lebendige, persönlich erfahrene Beziehung zu den drei Grunderfahrungen haben und wissen, dass erfolgreiches Lernen nicht durch Abbilden, sondern nur durch aktives Kon-

struieren möglich ist. Das heißt, die Professionalisierung von Lehramtsstudierenden, Referendaren und Fachleitern ist konzeptionell eine *gemeinsame* Aufgabe.

Lernen im Beruf

Ein Kernbereich der Weiterbildung in der dritten Phase ist die institutionalisierte *Lehrerfortbildung*. Auf der inhaltlichen Seite wird es darauf ankommen, solche Angebote zu konzipieren, die vertraute und etablierte Themenkreise der Oberstufenmathematik mit Blick auf die drei Grunderfahrungen zu restrukturieren gestatten. Ohne die Entwicklung einer veränderten *Aufgaben- und Unterrichtskultur* werden solche Angebote allerdings keinen nachhaltigen Einfluss auf die Unterrichtsrealität haben. Die vielversprechenden Anfänge des laufenden BLK-Projekts *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts* für die Sekundarstufe I sollten hier aufgenommen und fortentwickelt werden.
Darüber hinaus wird die *Psychologie der Fortbildungsangebote* entscheidend sein: Um die dritte Grunderfahrung von der Kraft heuristischer Denk- und Arbeitsweisen erlebbar zu machen, müssen sich alle Beteiligten als Suchende und an der offenen Erkundung Interessierte begreifen können. Leiter gelungener Fortbildungsveranstaltungen sind – bei aller notwendigen Kompetenz in der Sache – weniger wissende Instruktoren als kundige Moderatoren von Lern- und Verständigungsprozessen. (Sie sind damit im übrigen Modelle für gute Lehrerinnen und Lehrer.) Die Sozialisation aus der ersten Phase mit ihrer einseitigen Orientierung an der disziplinären Struktur der Mathematik wird hier oft zu einem Problem. Den Fachlehrerinnen und –lehrern wohnt ein beträchtliches ‚heuristisches Potenzial' inne. Dieses freizulegen und bewusst zu machen gehört zu den zentralen Aufgaben der fachbezogenen Lehrerfortbildung.

KAISER, G.: Vergleichende Untersuchungen zum Mathematikunterricht im englischen und deutschen Schulwesen, Journal für Mathematik-Didaktik (1997) 18. Jg., H. 2/3, S.127-170

KAISER, G.; BLUM, W.; WIEGAND, B.: Ergebnisse einer Langzeitstudie zu den mathematischen Leistungen deutscher und englischer Lernender. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1997. Verlag Franzbecker 1997, S. 263-266

NOCKER, R., Der Einfluss von Computeralgebrasystemen auf die Unterrichtsmethoden und die Schüleraktivitäten, Beiträge zum Mathematikunterricht (1996), S.325 - 328

SCHWILL, A., Fundamentale Ideen der Informatik, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25 (1993), H. 1, S.20 - 31

TERHART, E.(Hrsg.): Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Beltz, Weinheim 2000

TIETZE, U.-P.: Der Mathematiklehrer in der Sekundarstufe II. Verlag Franzbecker 1986

TIETZE, U.-P.: Materialien zu: Berufsbezogene Kognitionen, Einstellungen und Subjektive Theorien von Mathematiklehrern an der gymnasialen Oberstufe, Band 1-3. Göttingen: Seminar für Didaktik der Mathematik, der Chemie und der Physik an der Universität Göttingen 1992

SCHUPP, H., Geometrie in der Sekundarstufe II, Journal für Mathematik-Didaktik (2000) 21.Jg.,H.1, S.50-66

VOLLRATH, H.-J., Methodik des Begriffslehrens, Klett, Stuttgart 1984

WEIGAND, H.-G., Eine explorative Studie zum computerunterstützten Arbeiten mit Funktionen, -Didaktik 20 (1999), H. 1, S.28 - 54

WEINERT, F.E, Bedingungen für mathematisch-naturwissenschaftliche Leistungen in der Schule und Möglichkeiten ihrer Umsetzung. In: Weiterentwicklung der Unterrichtskultur des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, Kultusministerium Baden-Württemberg, Stuttgart 1999, S.21 - 32

WIEGAND, B.: TIMSS als Spiegel für Defizite im deutschen Mathematikunterricht der Sek. II Analysen von Aufgaben aus TIMSS-3 und Interpretationen der Ergebnisse. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Verlag Franzbecker 1999, S. 594 - 597.

WINTER, H., Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 1995, S.37 - 46

WITTMANN, E. Ch., Mathematics as a ´design science´, Educational Studies in Mathematics, 1995, Vol. 29 (4), S.355 - 374

Prof. Dr. Peter Borneleit
Universität Leipzig

Prof. Dr. Rainer Danckwerts
Universität-Gesamthochschule Siegen

Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn
Universität Dortmund

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Universität Würzburg

Im Juni 2000