BLK

Hans-Joachim Vollrath

Mit geometrischen Formeln Beziehungen erkennen

Beitrag zu Modul 4

Inhalt

1. Probleme bei Aufgaben mit geometrischen Formeln

1.1 Formeln im Geometrieunterricht

Der Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I ist von 2 Themenbereichen bestimmt:

Formenlehre und *Inhaltslehre*.

Die *Formenlehre* befaßt sich mit Figuren und Körpern. Wichtige Eigenschaften werden als Symmetrieeigenschaften erkannt, die sich auf Abbildungen zurückführen lassen. Wichtige Relationen zwischen Figuren und zwischen Körpern sind

Kongruenz und *Ähnlichkeit*.

Die *Inhaltslehre* behandelt Umfänge und Flächeninhalte von Figuren sowie Oberflächeninhalte und Rauminhalte von Körpern. Grundlegende Relationen sind hier Längengleichheit,

Flächeninhaltsgleichheit und *Rauminhaltsgleichheit*.

Formenlehre und Inhaltslehre sind miteinander *verbunden*. So wird z.B. bei der Erarbeitung des Flächeninhalts vom Dreieck gezeigt, daß man ein Rechteck finden kann, bei dem es möglich ist Dreieck und Rechteck in paarweise kongruente Teilfiguren zu zerlegen. Inhaltsgleichheit wird hier auf Kongruenz zurückgeführt. Der Mathematikunterricht ist so zu organisieren, daß es möglich ist, derartige *Querverbindungen* herzustellen.

Zur Bestimmung von Inhalten werden im Unterricht *Formeln* erarbeitet. Formeln sind an sich zentraler Inhalt des Algebraunterrichts. Hier werden ein Grundverständnis für Formeln und Fähigkeiten im Umgang mit Formeln vermittelt. Im Unterricht ist also auch eine Querverbindung zwischen

Geometrie und *Algebra*

herzustellen.

Innerhalb der Inhaltslehre wird im Unterricht eine *Entwicklung* angestrebt. Das bezieht sich zunächst auf die Werkzeuge: In der 5. Jahrgangsstufe wird der Flächeninhalt eines Rechtecks durch einfaches Abzählen von Einheitsquadraten, dann durch geschicktes Abzählen, schließlich mit einer „Zählformel“ bestimmt. Von der 7. Jahrgangsstufe an wird mit Formeln gearbeitet. Zunächst beschränkt man sich dabei auf Vielecke. Später folgen dann auch die Formeln für den Kreis. In der 10. Jahrgangsstufe werden in der Trigonometrie neue Formeln für Vielecke gefunden, bei denen nun auch der Winkel eingeht. In der Sekundarstufe II wird schließlich die Inhaltsberechnung durch das bestimmte Integral erweitert und vertieft.

Bei den Lernenden wird erwartet, daß sich im Laufe der Schulzeit das *Verständnis* für Flächen- und Rauminhalte und die *Fähigkeiten* im Umgang mit ihnen entwickeln. Dies müßte sich in der Fähigkeit äußern, *einschlägige Aufgaben unterschiedlichen Niveaus* lösen zu können. Im Prinzip erwartet man also, daß die Schülerinnen und Schüler im Laufe ihrer Schulzeit immer anspruchsvollere Aufgaben zu Flächen- und Rauminhalten lösen können.

Auf Grund unterschiedlicher Begabungen und Interessen sind jedoch individuelle Unterschiede bei der Bewältigung derartiger Aufgaben zu erwarten. Der Unterricht hat den Schülerinnen und Schülern ein *differenziertes Angebot von Aufgaben unterschiedlichen Anspruchs* zu bieten.

1.2 Erwartungen

Formeln für die Flächeninhalte von *Grundfiguren* und für Rauminhalte von *Grundkörpern* werden heute in der Sekundarstufe I in allen Schularten erarbeitet. Erwartet werden dann Grundanforderungen beim Verständnis dieser Formeln und beim Arbeiten mit ihnen.

Grundlegende Formeln wie z.B. die Formeln für den Flächeninhalt eines Quadrats, eines Rechtecks, eines Dreiecks oder eines Kreises prägen sich den Schülern ein. Bei anderen Formeln wie z.B. den Formeln für die Oberfläche und für das Volumen der Kugel schauen sie meist in der *Formelsammlung* nach. Auch der Taschenrechner gewinnt als Wissensspeicher zunehmend an Bedeutung.

In Formelsammlungen findet man einschlägige Formeln unter verschiedenen *Überschriften*. Diese beziehen sich auf verschiedene *Typen* von Figuren und Körpern. So gibt es etwa eine Rubrik „Dreiecke“, eine Rubrik „Vierecke“ und eine Rubrik „Einfache Körper“. Aber auch bei verschiedenen *Gebieten* finden sich Formeln. So werden bei der Trigonometrie und bei der analytischen Geometrie weitere Formeln für den Flächeninhalt eines Dreiecks angegeben.

Betrachtet man eine Rubrik näher, dann finden sich unter Umständen Formeln für *verschiedene Größen*. Bei den Figuren finden sich Formeln für den Umfang U und den Flächeninhalt A, bei den Körpern Formeln für den Oberflächeninhalt O und den Rauminhalt V.

Zu den einzelnen Figuren werden *Skizzen* abgebildet, welche die Bedeutung der in den Formeln auftretenden Größen deutlich machen. So kann man sehen, daß beim Trapez mit a und c die beiden zueinander parallelen Seiten und mit h die Höhe bezeichnet ist. Für den Drachen wird sichtbar, daß mit e und f die Diagonalen gemeint sind.

Daß zwischen all diesen Formeln *Beziehungen* bestehen, wird in der Formelsammlung nicht sichtbar. Man erkennt weder, daß z.B. zwischen Formeln für die Flächeninhalte der verschiedenen Viereckstypen Beziehungen bestehen, noch daß z.B. beim Quadrat eine Beziehung zwischen Umfang U und Flächeninhalt A besteht. Entsprechendes gilt für die Körper.

Man wird der Formelsammlung keinen Vorwurf machen, denn wer Formeln und die ihnen zugrunde liegenden Sachverhalte verstanden hat und mit Formeln arbeiten kann, dem sind diese Zusammenhänge klar oder sie lassen sich ohne größere Schwierigkeiten klarmachen. Das Kennen von Beziehungen und die Fähigkeit, dieses Wissen bei Problemlösungen einzusetzen, ist ein wesentliches Merkmal des *Verstehens*.

Man erwartet vom Mathematikunterricht zunächst, die Fähigkeit zu vermitteln, für die bekannten Figuren Umfänge und Flächeninhalte sowie für die bekannten Körper Oberflächeninhalte und Rauminhalte sicher mit Hilfe eines Wissensspeichers und gegebenenfalls eines Taschenrechners zu berechnen. Dabei sollen auch für zusammengesetzte Figuren und Körper die entsprechenden Aufgaben sicher gelöst werden können.

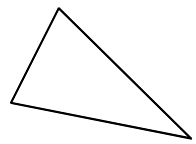
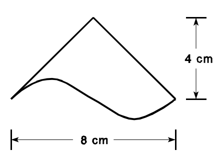
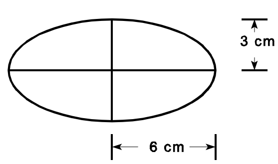
Darüber hinaus ist es ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts, bei den Lernenden die Fähigkeit zu vermitteln, im Bereich der Figuren und Körper Beziehungen zu erkennen und für Problemlösungen zu nutzen.

Nach unseren Beobachtungen an Schülern und Studienanfängern werden die Grundaufgaben zur Berechnung von Umfängen, Flächeninhalten und Rauminhalten recht gut bewältigt. Deutliche Defizite werden sichtbar, sobald es um das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen geht.

Diese Fähigkeit wird bei der Bearbeitung der üblichen Aufgaben zur Berechnung von Umfängen, Flächen- und Rauminhalten nicht *nebenbei* erworben, sondern es bedarf besonderer unterrichtlicher Bemühungen, um sie bei den Lernenden auszubilden. Dafür will diese Arbeit einige Anregungen geben.

Wir wollen zunächst auf einige Defizite hinweisen. Dies geschieht im nächsten Abschnitt mit Hilfe von Testaufgaben, wie wir sie im Rahmen eines Forschungsprojekts bei Befragungen von Schülerinnen und Schülern sowie von Studierenden einsetzen.

1.3 Ein Test

Aufgaben	**Kommentar**
Das Dreieck ist im Maßstab 1:3 gezeichnet. Berechne seinen Flächeninhalt. 	Die einfache Aufgabe bereitet Schwierigkeiten, weil keine Maße gegeben sind. Es ist ungewöhnlich, daß in einer Aufgabe verlangt wird, sich erst die Daten selbst zu besorgen.
Bestimme den Flächeninhalt A einer Raute mit b = 4 cm und h_b= 3 cm.	Die Schülerinnen und Schüler denken bei der Raute nur an die Formel, in der die Diagonalenlängen e und f auftreten. So sind sie hilflos.
Für den Oberflächeninhalt einer Kugel mit dem Radius r gilt $O = 4\pi r^2$. Gib O in Abhängigkeit vom Kugeldurchmesser d an.	Häufig wissen die Schülerinnen und Schüler gar nicht, was erwartet wird. Aber selbst wenn das klar ist, scheitern viele an den nötigen Umformungen.
Zeige, daß die Formel für den Rauminhalt des Quaders in der Formel für den Rauminhalt des Prismas als Sonderfall enthalten ist.	Schülerinnen und Schüler haben Schwierigkeiten zu verstehen, was mit der Aussage gemeint ist. Selbst wenn sie diese verstehen, bereiten die an sich einfachen Umformungen große Probleme.
Bestimme die Seitenlänge eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt hat wie ein Parallelogramm mit der Seitenlänge 24 cm und der zugehörigen Höhe von 6 cm Länge.	Diese Aufgabe kann durch eine Kette von einfachen Überlegungen und Rechnungen gelöst werden. Eine solche Kette bereitet häufig Schwierigkeiten.
Begründe: Eine Halbkugel mit Radius r hat doppelt so großes Volumen wie ein Kegel mit Radius r und Höhe r.	Allein die Aufforderung „Begründe“ schreckt viele Schülerinnen und Schüler ab. Schwierig ist es dann auch, die beiden Formeln in Beziehung zu setzen.
Bestimme den Flächeninhalt der Figur. 	Hier fühlen sich Schülerinnen und Schüler hilflos, weil sie nicht die angeblich notwendige Formel kennen.
Was kannst du über den Flächeninhalt der Ellipse aussagen? 	Daß Abschätzungen von Flächeninhalten häufig „besser als nichts“ sind, ist vielen Schülerinnen und Schülern nicht bewußt. Mit Hilfe eines umbeschriebenen Rechtecks und einer einbeschriebenen Raute eine allgemeine Abschätzung zu finden, ist dann noch deutlich schwieriger, auch wenn sie über die entsprechenden Formeln verfügen.
Gibt es einen Kegel dessen Mantelfläche genau so groß ist wie seine Grundfläche?	Hierbei handelt es sich um eine Aufgabe, bei der eine Formel ($M = \pi rs$) zu analysieren und dabei in Beziehung zur Figur zu setzen ist.
Wie viele Quadrate der Seitenlänge 4 cm passen in ein Rechteck von 2 m²?	Diese Aufgabe ist für Schülerinnen und Schüler der 5. Jahrgangsstufe leicht. Je älter sie sind, desto hilfloser erscheinen sie.

1.4 Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus

In der Aufgabentradition des Unterrichts, wie sie sich in der Unterrichtspraxis und in den Schulbüchern darstellt, besteht für Flächen- und Rauminhalte kein Mangel an Aufgaben zur Sicherung eines Grundniveaus.

Auch die in dem Aufgabenblatt gezeigten Aufgaben sind im Prinzip nicht ungewöhnlich. Schwierigkeiten beim Lösen dieser Aufgaben haben sicher mit dem fehlenden Unterrichtskontext und vielleicht auch den Aufgabenformulierungen zu tun. Wesentlich sind aber auch die Schwierigkeiten, die viele Schülerinnen und Schüler mit der Algebra haben. Es ist das Ziel dieser Arbeit, Lehrkräften Anregungen für Aufgabenstellungen mit höheren Anforderungen auf unterschiedlichem Niveau zu geben.

Dabei ist es unser Ziel, im Mathematikunterricht möglichst vielen Schülerinnen und Schülern das Verständnis *geometrischer Phänomene* mit *algebraischen Methoden* zu eröffnen. Daß dies auf *unterschiedlichen Niveaus* möglich ist, wollen die Aufgaben deutlich machen.

Diese Ausführungen wollen im Rahmen des BLK-Projekts Steigerung der *Effizienz des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Unterrichts* Anregungen zum Modul 4:

Sicherung von Basiswissen – Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus

bieten.

2. Beziehungen zwischen Figuren und Formeln erkennen

2.1 Die richtigen Maße finden

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks

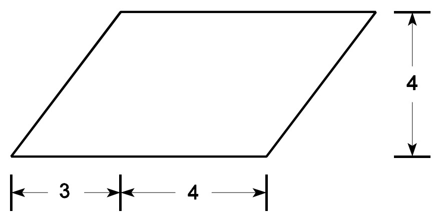


Fig. 2.1

Das Viereck ist ein Parallelogramm. Für die Berechnung nach der Formel A = gh werden die Maße der „Grundseite“ g und der zugehörigen Höhe h benötigt.
Man liest ab: g = 7 cm und h = 4 cm, das ergibt A = 7 cm· 4 cm = 28 cm².

(2) *Anforderungen und Schwierigkeiten*

Die Schülerinnen und Schüler sollen den Flächeninhalt einer Figur mit Hilfe einer Formel berechnen. Die Aufgabenstellung erfordert es zunächst, die gegebene Figur als Parallelogramm zu erkennen, sodann g und h an der Figur zu identifizieren. Dazu gibt es im Prinzip 2 Möglichkeiten. Durch die Maßangaben ist jedoch klar, daß nur die waagerechte Seite als Grundseite in Frage kommt. Die zugehörige Höhe ist zwar nicht eingezeichnet, ihre Länge kann jedoch der Maßangabe am Rand entnommen werden.

Die Aufgabenformulierung weicht etwas von der üblichen Form in den Schulbüchern ab: Die Figur ist nicht als Parallelogramm bezeichnet und die Maßangaben sind nicht unmittelbar an den entsprechenden Strecken angebracht. Andererseits ist dies eine Darstellung, die weitgehend der Praxis (z.B. in technischen Zeichnungen) entspricht.

(3) *Variation der Anforderungen*

In der Aufgabe waren die Maßzahlen natürliche Zahlen. Durch Wahl von gebrochenen Maßzahlen steigert man etwas die Anforderungen. Dabei entsprechen Dezimalbrüche der Praxis.

Gewöhnliche Brüche wirken künstlich und sind eigentlich nicht so recht geeignet.

Interessanter und im Hinblick auf die Praxis auch wichtiger ist die Variation der Maßangaben. Dafür einige Beispiele.

Aufgabe 2: Ein Viereck ist im Maßstab 1:3 gezeichnet. Berechne seinen Flächeninhalt. Bestimme dazu zunächst die erforderlichen Maße an der Zeichnung.

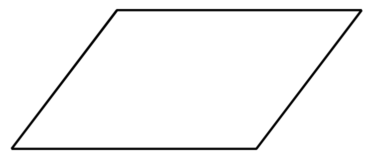


Fig. 2.2

In dieser Aufgabe muß man sich zunächst entscheiden, welche Seite man als Grundseite wählt. Die zugehörige Höhe ist erst einzuzeichnen. Die Längen sind dann zu messen und zu verdreifachen. Dann sind die „wahren“ Längen zu multiplizieren. Hier sind also von den Schülerinnen und Schülern deutlich mehr eigene Schritte zu gehen als in Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Berechne den Flächeninhalt des Vierecks

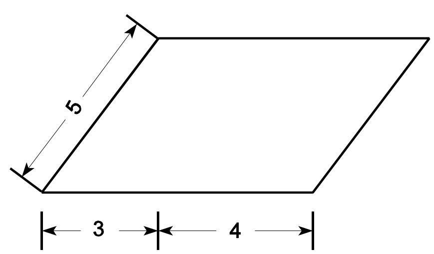


Fig. 2.3

Hier sind zwar beide Seitenlängen ablesbar, aber es fehlen Angaben über die Höhe. Zeichnet man die zur waagerechten Seite gehörige Höhe ein, so sieht man sogleich, daß man ihre Länge aus dem rechtwinkligen Teildreieck mit dem Satz des Pythagoras bestimmen kann.

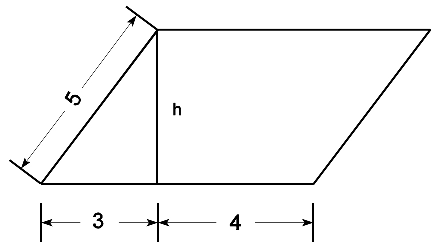


Fig. 2.4

Die Aufgabe ist den Schülerinnen und Schülern also erst nach der Behandlung dieses Satzes zugänglich. (Es sei denn, sie *messen* die Länge der eingezeichneten Höhe.)

Die relativ harmlos aussehende Änderung der Aufgabenstellung hat also gravierende Folgen hinsichtlich der Anforderungen.

(4) *Hintergrund*

a) Modellbildung

Indem bei diesen Aufgabenformulierungen den Schülerinnen und Schülern der Figurentyp nicht mitgeteilt wird, ist zunächst zu entscheiden, um welchen Figurentyp es sich handelt. Wir haben oben davon gesprochen, daß die Schülerinnen und Schüler „erkennen", daß es sich um ein Parallelogramm handelt. Das ist allerdings nicht ganz korrekt. Zwar „sieht die Figur wie ein Parallelogramm aus", doch da es sich um eine Zeichnung handelt, ist Vorsicht geboten. Die Zeichnung enthält keine Symbole, die darauf schließen lassen, daß die Figur ein Parallelogramm ist. Einer *realen* Figur eine Eigenschaft zuzuschreiben, bedarf einer bewußten Entscheidung. Es wird *angenommen*, daß die Figur ein Parallelogramm darstellt. Diese Annahme ist durch die Anschauung gerechtfertigt. Man könnte sie auch durch Nachmessen stützen. Diese Aufgabenformulierung erfordert also eine *Modellbildung*. Das sollte den Lernenden bewußt gemacht werden.

Durch Modellbildung wird eine Beziehung zwischen der Umwelt und der Mathematik hergestellt. Besonders durch HANS FREUDENTHAL (1905-1990) wurde immer wieder betont, wie wichtig es ist, Mathematik im Unterricht auf diese Weise entstehen zu lassen. Er sprach von *Mathematisierung.* Inzwischen hat sich dafür der Terminus Modellbildung eingebürgert.

b) Anwendung

Ist die Annahme gemacht, daß es sich bei der Figur um ein Parallelogramm handelt, so kann man nun die Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms anwenden. In der *Anwendung* wird Mathematik benutzt, um ein praktisches Problem zu lösen. Durch Anwendung wird also eine Beziehung zwischen Mathematik und Umwelt hergestellt.

Die Anwendung der Formel erfordert eine Entscheidung, welche Seite als „Grundseite" betrachtet werden soll. Daß sie eine Wahl haben, ist vielen Schülerinnen und Schülern nicht bewußt. Denn für sie ist Grundseite immer die Seite, die unten liegt.

Man könnte dieses Mißverständnis vermeiden, wenn man statt dessen formulieren würde:

> Für ein Parallelogramm gilt:
>
> *Flächeninhalt = Seite mal zugehörige Höhe.*

Das ist aber nicht üblich.

c) Präzision der Sprache

Aber auch unsere Formulierung ist noch nicht ganz glücklich. Man könnte einwenden, daß sie zu unpräzise ist. Denn eigentlich müsse es heißen:

> *Flächeninhalt = Länge einer Seite mal Länge der zugehörigen Höhe.*

Aber das ist eine der Spitzfindigkeiten, die die Mathematik vielen Schülerinnen und Schülern verhaßt machen. Aber seien wir ehrlich, ist auch nicht uns „Grundseite mal Höhe" in Fleisch und Blut übergegangen? Man sollte also im Unterricht nicht auf diesen Formalien herumhacken, weil man das im Grunde doch nicht konsequent durchhalten kann.

d) Offene Aufgabenstellungen

Die Aufgabenformulierungen lassen den Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Spielräume zum Lösen. Das wird besonders deutlich bei Aufgabe 2. Hier können sie selbst frei entscheiden, welche Stücke sie wählen. In den beiden anderen Aufgaben werden sie durch die Angaben in ihrer Wahl eingeschränkt.

Alle Aufgaben erfordern die Beschaffung von Daten. Auch hierbei haben die Schülerinnen und Schüler wieder unterschiedliche Spielräume. In Aufgabe 1 ist klar, daß die angegebenen Daten zu verwenden sind. In Aufgabe 2 müssen die Daten durch Messung von den Schülerinnen und Schüler selbständig bestimmt werden. In Aufgabe 3 ist eine Überlegung erforderlich.

Die Aufgaben werden durch diese Anforderungen realitätsnäher und für die Schülerinnen und Schüler auch anregender. Allerdings sind diese Formulierungen für viele noch ungewohnt.

e) Problemlösen

Die Notwendigkeit einer zusätzlichen Überlegung macht die Aufgabe 3 zu einem *Problem*. Um die Aufgabe mit Hilfe der Formel lösen zu können, fehlt eine Angabe, nämlich die Länge der Höhe. Der Satz des Pythagoras liefert die Lösungsidee. Ist er den Schülerinnen und Schülern bekannt, so ist das Problem für sie lösbar.

Die Aufgabe zeigt, wie durch eine einfache Änderung der Angaben, aus einer Routineaufgabe eine Problemaufgabe werden kann.

2.2 Die richtige Formel finden

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Drücke den Oberflächeninhalt des Prismas mit Hilfe der angegebenen Größen aus.

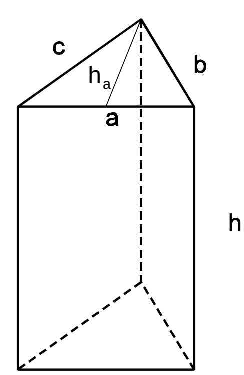


Fig. 2.5

Am besten zeichnet man sich zunächst eine Abwicklung.

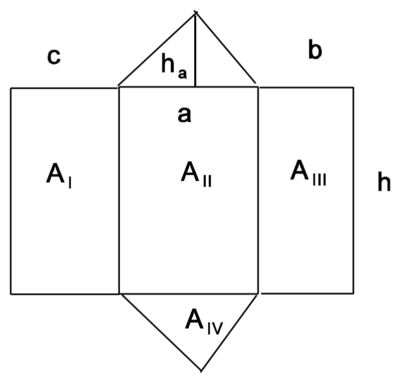


Fig. 2.6

Damit ist klar:

$$O = A_I + A_{II} + A_{III} + 2A_{IV}.$$

Für die Flächeninhalte der Teilflächen kann man die Rechtecks- und die Dreiecksformel heranziehen. In jedem Fall ist aber zu entscheiden, welche Variablen jeweils zu wählen sind. Am besten greift man auf die „verbalen“ Formeln zurück. Dann findet man:

$$A_I = ch; \quad A_{II} = ah; \; A_{III} = bh; \quad A_{IV} \qquad \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Also:

$$O = ch + ah + bh + ah_a.$$

Das kann man umformen zu:

$$O = (a + b + c)h + ah_a.$$

(2) *Anforderungen und Schwierigkeiten*

Aufgaben dieser Art empfinden die Schülerinnen und Schüler als schwierig. Das beginnt schon mit der Aufgabenstellung. Es soll etwas „ausgedrückt“ und nicht etwas berechnet oder bestimmt werden. Im Unterricht kommen zu selten Aufgaben dieser Art vor, so daß die Schülerinnen und

Schüler mit dieser Formulierung Schwierigkeiten haben.

Wissen sie, worum es geht, dann ist der Lösungsweg im Prinzip klar: Man braucht ja bloß Terme für die Flächeninhalte der Teilflächen anzugeben und hat diese dann zu addieren. Doch praktisch sind sie dann mit einigen Schwierigkeiten konfrontiert:

Zunächst sind die Rechtecks- und die Dreiecksformel an die Gegebenheiten anzupassen. Algebraisch bedeutet das die entsprechende Substitution der Variablen. Man kann das weniger formal erreichen mit Hilfe der verbal formulierten Formeln.

Eine weitere formale Schwierigkeit besteht dann darin, lediglich die Terme aus den Formeln zu nehmen und diese (und nicht etwa die Formeln) zu addieren.

Schließlich ist die gefundene Formel zu vereinfachen. Inwiefern stellt das Ausklammern eine Vereinfachung dar? Hier ist die Vorstellung hilfreich, Terme als Rechenvorschriften zu sehen. Dann ist klar, daß bei dem letzten Term weniger zu rechnen ist (wenn man einsetzt). Dieser Hinweis kann eine Hilfe sein.

(3) *Hintergrund*

Das Kernproblem dieser Aufgabe besteht darin, daß es sich um ein *formales* Problem handelt, bei dem nur mit Variablen zu arbeiten ist. Hier ist nichts zu berechnen, sondern hier ist eine *Formel* zu finden und umzuformen.

Man kann dafür *praktische Bedürfnisse* anführen: Viele Anwender müssen zur Lösung von Problemen zunächst eine Formel aus bekannten Formeln gewinnen.

Allerdings verliert das praktisch an Bedeutung, weil derartige Probleme heute zunehmend mit Tabellenkalkulation gelöst werden.

Diese Technik wird aber vor allem in der Mathematik selbst, in der Physik, in den Ingenieurwissenschaften und in der Technik benötigt, um Formeln herzuleiten, die Zusammenhänge beschreiben und begründen. Diese Tätigkeit wird auch durch Computeralgebra-Programme nicht überflüssig.

Lit.: H.-J. VOLLRATH, *Algebra in der Sekundarstufe*, Mannheim (Wissenschaftsverlag) 1994

(4) *Aufgabenvariante*

Im Unterricht vermeidet man es im allgemeinen, bei einer rein formalen Aufgabenstellung zu bleiben. Man würde also eher formulieren:

> **Aufgabe 2:** Berechne den Oberflächeninhalt des Prismas für
>
> a = 21 cm; b = 10 cm; c = 17 cm; h_a = 8 cm; h = 40 cm.
>
> Stelle zunächst eine Formel auf.

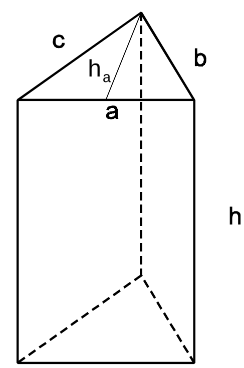


Fig. 2.7

In dieser Aufgabe ist das Aufstellen einer Formel nur ein Zwischenschritt, der allerdings zur Berechnung des Oberflächeninhalts nicht erforderlich ist. Denn die Teilflächeninhalte ließen sich auch unmittelbar mit Hilfe der Rechtecks- und der Dreiecksformel berechnen.

Wenn man mit konkreten Maßzahlen arbeiten will, muß man aufpassen, denn die Aufgabe ist eigentlich *überbestimmt*. Mit a, b und c ist auch h_a festgelegt. Um natürliche Zahlen zu erhalten, haben wir pythagoräische Zahlen gewählt:

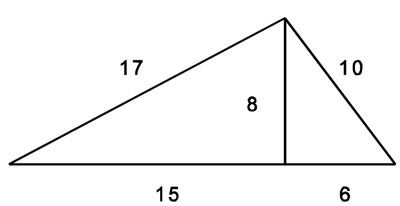


Fig. 2.8

3. Mit Formeln Beziehungen zwischen Figuren und Körpern erkennen

3.1 Erkennen der Flächeninhaltsgleichheit gleichartiger Figuren

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Begründe, daß die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleichen Flächeninhalt haben.

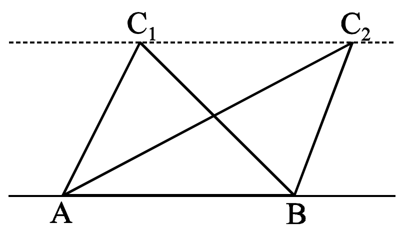


Fig. 3.1

Die beiden Dreiecke haben eine gemeinsame Seite. Die zugehörigen Höhen sind gleich lang.
Nach der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks haben sie deshalb gleichen Flächeninhalt.

(2) *Anforderungen und Schwierigkeiten*

Wenn die Schülerinnen und Schüler Aufgaben dieser Art bereits gelöst haben, dann dürfte es nicht schwer fallen, das richtige Argument zu finden. Die Aufgabe ist dann praktisch eine Routineaufgabe, obwohl etwas zu begründen ist, was ja Schülerinnen und Schüler im allgemeinen abschreckt.

Wenn die Schülerinnen und Schüler erstmals mit dieser Aufgabe konfrontiert werden, dann handelt es sich um eine Problemaufgabe. Im allgemeinen werden sie versuchen, die Dreiecke durch geeignete Hilfslinien in paarweise kongruente Teildreiecke zu zerlegen, um damit die Zerlegungsgleichheit der Dreiecke nachzuweisen. Erfahrungsgemäß scheitern sie dabei.

(3) *Variation der Anforderungen*

Kennen die Schüler die Lösung der Aufgabe, dann kann man analoge Aufgaben stellen, die Überlegungen erfordern. Dafür einige Beispiele.

Aufgabe 2: Begründe, daß die 3 Dreiecke ABC, ABD und EBD flächeninhaltsgleich sind.

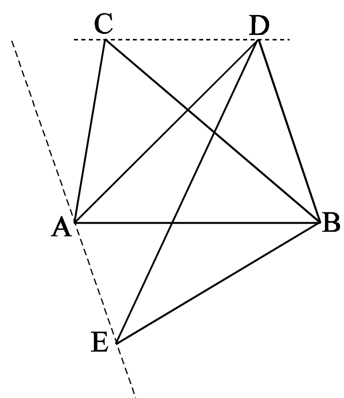


Fig. 3.2

Der Nachweis, daß Dreieck ABC und Dreieck ABD flächeninhaltsgleich sind, wird wie in Aufgabe 1 erbracht.
Daß Dreieck ABD und Dreieck EBD flächeninhaltsgleich sind, erfordert im Prinzip die gleiche Überlegung, nur ist diesmal eine andere Seite gemeinsame Grundseite.
Wegen der Transitivität der Relation „flächeninhaltsgleich" folgt, daß auch Dreieck ABC und Dreieck EBD flächeninhaltsgleich sind.

Aufgabe 3: Begründe, daß die beiden Dreiecke ABC und DEC flächeninhaltsgleich sind.

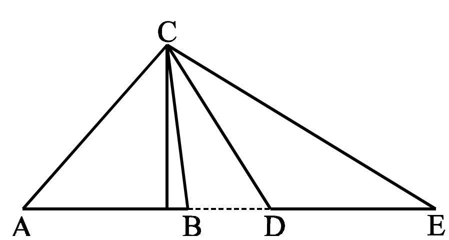


Fig. 3.3

Wieder wird mit der Formel argumentiert. Diesmal haben die beiden Dreiecke jedoch eine gemeinsame Höhe.

Man kann ähnliche Aufgaben für die Vierecke stellen.

Aufgabe 4: Begründe, daß das schraffiert gezeichnete Trapez flächeninhaltsgleich dem durchgezeichneten Trapez ist.

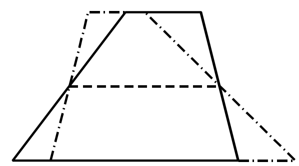


Fig. 3.4

Die beiden Trapeze haben eine gemeinsame Mittellinie und gleich lange Höhe. Nach der Formel A = mh haben sie demnach gleichen Flächeninhalt.

Haben die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen mit derartigen Aufgaben gesammelt, kann man ihnen die „Umkehraufgabe“ stellen:

Aufgabe 5: Zeichne ein gleichseitiges und ein rechtwinkliges Dreieck, die gleichen Flächeninhalt haben.

Die Lösung könnte z.B. in der Figur bestehen:

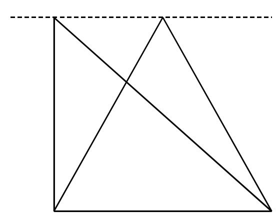


Fig. 3.5

Diese Aufgabe dürfte für die meisten Schüler eine Problemaufgabe sein, weil nun bei den zu zeichnenden Figuren zusätzliche Bedingungen zu berücksichtigen sind. Z. B. ist es zweckmäßig, mit dem gleichseitigen Dreieck zu beginnen.

(4) *Hintergrund*

a) Ausdruckskraft von Formeln in der Geometrie

Die Flächeninhaltsformeln liefern algebraische Argumente für die Flächeninhaltsgleichheit von Figuren. In der Figur

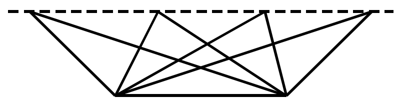


Fig. 3.6

versagt die Anschauung, wenn es darum geht, die gezeichneten Dreiecke hinsichtlich ihres Flächeninhalts zu vergleichen. Formeln sind also geeignet, *Grenzen der Anschauung zu überwinden*.

Flächeninhaltsformeln sind demnach nicht nur *Anweisungen*, wie man Flächeninhalte berechnet, sondern sie sind *Trägerinnen von Erkenntnis* über Flächeninhaltsgleichheit von Figuren. Diese Einsicht kann den Schülerinnen und Schülern helfen, eine bloß formale Sicht von Formeln zu überwinden.

b) Beweisen

Erfahrungsgemäß haben Schülerinnen und Schüler eine besondere Abneigung gegen das Beweisen. Das liegt vor allem daran, daß sie unsicher sind, was eigentlich von ihnen verlangt wird. Man kann diese „Sperre“ abbauen, indem man immer wieder nach *Begründungen* fragt. Der vorliegende Kontext bietet den Schülern zahlreiche Möglichkeiten, selbständig mit Hilfe von Formeln Begründungen für geometrische Sachverhalte zu geben.

c) Integration von Algebra und Geometrie

Schülerinnen und Schüler neigen dazu, in „Schubkästen“ zu denken. Es gibt da den Schubkasten „Algebra“ und den Schubkasten „Geometrie“. Die Formelsprache ist eine Erfindung der Neuzeit. In den *Elementen* des EUKLID (300 v. Chr.) wird auch bei der Behandlung von Flächeninhalten rein geometrisch argumentiert. Es mag durchaus sinnvoll sein, auch im Unterricht derartige Fragen gelegentlich rein geometrisch zu behandeln. Andererseits ist es wichtig, den Schülern die Kraft der algebraischen Formelsprache deutlich zu machen. Man baut damit zugleich eine *Brücke zwischen Geometrie und Algebra*.

Lit.: H.-J. VOLLRATH, *Algebra in der Sekundarstufe*, Mannheim (Wissenschaftsverlag) 1994

3.2 Erkennen der Flächeninhaltsgleichheit verschiedenartiger Figuren

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Begründe, daß das Parallelogramm und das Dreieck gleichen Flächeninhalt haben.

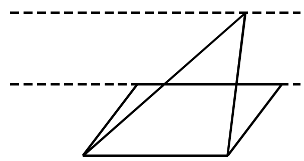


Fig. 3.7

Die beiden Figuren haben die gleiche Grundseite. Die Höhe des Dreiecks ist doppelt so groß wie die des Parallelogramms.
Bezeichnen wir die Grundseite mit g und die Höhe des Parallelogramms mit h, so hat das Dreieck die Höhe 2h.
Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist

$$A_P = gh,$$

der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$A_D \quad g\cdot 2\frac{h}{2} \quad g\cdot h,$$

also gilt

$$A_P = A_D.$$

(2) *Anforderungen*

Diese Aufgabe stellt etwas höhere Anforderungen als die vorangegangenen, denn hier ist mit 2 Formeln zu arbeiten. Um die Formeln überhaupt ansetzen zu können, ist es sinnvoll, sich zunächst Gedanken über die entscheidenden Größen zu machen. Die Beziehung zwischen den beiden Höhen kann man auf zweierlei Weise ausdrücken:

Die Höhe des Dreiecks ist doppelt so groß wie die Höhe des Parallelogramms

oder:

Die Höhe des Parallelogramms ist halb so groß wie die Höhe des Dreiecks.

Die algebraische Argumentation wird im ersten Fall etwas einfacher.

(3) *Variation der Anforderungen*

Aufgabe 2: In dem berühmten Lehrbuch *Die Elemente* von EUKLID findet sich folgender Satz:

Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, so ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck.

Mache dir den Satz an einer Figur klar und beweise ihn.

Wir haben hier den Satz nach der Übersetzung von THAER formuliert. Zum Beweis ist es nur erforderlich, die beiden Formeln hinzuschreiben. Dann sieht man unmittelbar die Behauptung. Die Schwierigkeit dieses Beweises liegt für die Schülerinnen und Schüler in seiner „Einfachheit“.

Aufgabe 3: In der Figur ist zu einem Rechteck ein flächeninhaltsgleiches Quadrat gezeichnet. Gib die Seitenlänge des Quadrats an.

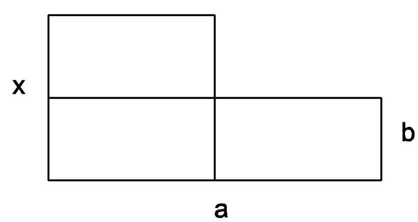


Fig. 3.8

Wir bezeichnen die gesuchte Seitenlänge des Quadrats mit x. Dann gilt wegen der Flächeninhaltsgleichheit:

$$x^2 = ab.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$x \quad \sqrt{a \cdot b}.$$

Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt in ihrer Allgemeinheit. Man kann sie vorbereiten durch eine konkretere Aufgabe der Art:

Aufgabe 4: Wie groß ist die Seitenlänge eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt hat wie ein Rechteck mit den Seitenlängen a = 3 cm und b = 12 cm?

In diesem Fall bestimmt man für den Flächeninhalt des Rechtecks A = 36 cm². Daraus erhält man durch Wurzelziehen x = 6 cm.

Ist die Formel für den Flächeninhalt des Kreises bekannt, so wird man auch die Aufgabe stellen:

Aufgabe 5: Bestimme die Seitenlänge eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt hat wie ein Kreis mit dem Radius r. Zeichne Kreis und Quadrat für r = 2 cm.

Die Antwort erhält man durch eine Umformung der Kreisformel:

$$A \quad \pi \cdot r^2 \quad (\sqrt{\pi} \cdot r)^2 \; .$$

Das gesuchte Quadrat hat also die Seitenlänge $\sqrt{\pi} \cdot r$.

(4) *Hintergrund*

Das Problem der Quadratur

Auch mit diesen Aufgaben kann man das Verständnis der Flächeninhaltsformeln vertiefen und algebraische Argumentationen üben. Darüber hinaus eignen sie sich dazu, einen Ausflug in die Geschichte der Geometrie zu unternehmen.

Man kann explizit historische Quellen heranziehen (Aufgabe 2).

Lit.: EUKLID, *Die Elemente,* Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1962

Man kann aber auch klassische Probleme ansprechen. Hier eignet sich vor allem das *Problem der Quadratur*. Unsere algebraische Behandlung verschleiert allerdings die Problematik etwas. Das Problem besteht bekanntlich darin, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu finden, die die Aufgaben lösen.

Die Quadratur des Rechtecks gelingt z.B. mit Hilfe des Höhensatzes, während ja die Quadratur des Kreises unlösbar ist (LINDEMANN 1882).

Die Schülerinnen und Schüler sollten auch selbst Texte lesen, in denen sie sich weiterführende Information besorgen. Besonders geeignet für diese Thematik ist z.B.

Lit.: P. BAPTIST: *Pythagoras und kein Ende?*, Leipzig (Klett) 1997

3.3 Beziehungen an Körpern erkennen

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Begründe, daß das Prisma und der Quader in der Figur gleiches Volumen haben.

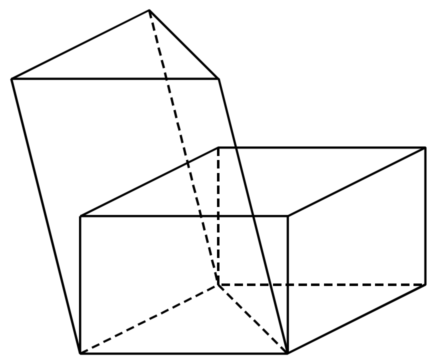


Fig. 3.9

Die Grundfläche des Prismas ist halb so groß wie die des Quaders. Dafür ist die Höhe des Prismas doppelt so groß wie die des Quaders.
Bezeichnet man die Grundfläche des Quaders mit G und seine Höhe mit h, so hat das Prisma die Grundfläche $\frac{G}{2}$ und die Höhe 2h. Man erhält also:

$$A_P \quad \frac{G}{2}\cdot 2h \quad G\cdot h \quad A_Q.$$

(2) *Anforderungen und Schwierigkeiten*

Wenn diese Aufgabe der Raumgeometrie auch weitgehend analog zu Aufgaben der ebenen Geometrie ist, so bereitet sie erfahrungsgemäß den Schülerinnen und Schülern doch größere Schwierigkeiten. Das liegt einmal darin, daß hier größere Anforderungen an das Vorstellungsvermögen gestellt werden. Zum anderen werden den Schülerinnen und Schülern wohl Argumentationen mit Rauminhaltsformeln vorgeführt. Nur selten werden von ihnen aber selbständige Argumentationen verlangt. Entsprechend hilflos sind viele bei derartigen Aufgaben. Diese Hemmungen sollten überwunden werden. Deshalb sollten Aufgaben dieser Art im Unterricht nicht fehlen.

(3) *Variation der Anforderungen*

Aufgabe 2: ARCHIMEDES (287-212) formuliert in seinem Buch *Kugel und Zylinder* folgenden Satz:

Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß wie die Fläche ihres größten Kugelkreises.

Beweise diesen Satz.

Natürlich ist hier nicht daran gedacht, daß die Schülerinnen und Schüler die sehr umfangreichen und komplizierten Überlegungen des ARCHIMEDES selbst finden sollen.

Kennt man die Formel für die Kugeloberfläche, so kann man den Satz unmittelbar aus ihr ablesen:

$$O = 4\pi r^2.$$

Nun ist πr^2 der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r. Das ist der größte Kreis auf der Kugel.

Aufgabe 3: Um eine Kugel mit dem Radius r ist ein Rechteck wie in der Figur „gewickelt".

a) Zeige, daß Rechteck und Kugeloberfläche den gleichen Flächeninhalt haben.
b) Nimm einen Ball und schneide ein passendes Rechteck aus Papier zu. Zerschneide das Papier und versuche, mit den Papierstreifen die Kugel zu bekleben.

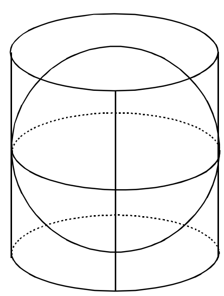


Fig. 3.10

Das Rechteck hat die Seitenlängen $a = 2\pi r$ und $b = 2r$. Sein Flächeninhalt ist also:

$$A = 4\pi r^2.$$

Dies ist zugleich der Flächeninhalt der Kugeloberfläche.

Aufgabe 4: Beweise den Satz:

Der Inhalt der Kugel ist viermal so groß wie der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Fläche des größten Kugelkreises und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist. (ARCHIMEDES)

Auch diese Behauptung kann man unmittelbar aus der Formel ablesen:

$$V \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \quad 4\cdot\frac{1}{3}\pi r^2\cdot r\ .$$

Die Werke des ARCHIMEDES sind eine Fundgrube für solche Zusammenhänge. Man kann die Schülerinnen und Schüler ermutigen, selbst derartige Zusammenhänge zu suchen und möglichst zu veranschaulichen. Sie werden dadurch veranlaßt, die Formeln einmal in neuem Licht zu betrachten, so daß sie ihnen vertrauter werden.

Lit.: ARCHIMEDES, *Werke*, Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1983

(4) *Hintergrund*

a) Das Problem Raumgeometrie

Raumgeometrie wird im Unterricht gegenüber der ebenen Geometrie weitgehend vernachlässigt. Sie beschränkt sich meist auf das Berechnen von Rauminhalten und Oberflächeninhalten sowie der Darstellung von Körpern im Schrägbild.

Andererseits leben wir im *Raum*. Der Mathematikunterricht hat deshalb die Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern zu helfen, sich in diesem Raum auch mathematisch zurechtzufinden. Die vorgeschlagenen Aufgaben sollen dazu dienen, mit Hilfe der Formeln Zusammenhänge zwischen und an Körpern zu erkennen.

Die historischen Beispiele sind für uns ungewohnt. Wir denken bei Rauminhalten und Oberflächeninhalten in *Formeln*. Für uns sind daher die Sätze unbefriedigend, denn sie lassen nicht unmittelbar erkennen, wie der Oberflächeninhalt und der Rauminhalt der Kugel von ihrem Radius abhängen. Uns befremden diese Formulierungen. Vielleicht gerade deshalb könnten sie für uns eine *Merkhilfe* für die Formel sein.

Aus heutiger Sicht wird hier eine Formel *uminterpretiert* und damit eine Beziehung zwischen

Objekten gestiftet, die zunächst nicht direkt miteinander zu tun haben. Immerhin kann sie uns einen Größenvergleich ermöglichen.

Lit.: A. FRICKE, *Didaktik der Inhaltslehre*, Stuttgart (Klett) 1983

b) Lernen durch Handeln

In Aufgabe 3 werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, eine *theoretisch* gewonnene Einsicht *praktisch* zu überprüfen. Auch Aufgabe 4 regt zu einer praktischen Überprüfung an. Man könnte den Zusammenhang z.B. durch einen Umfüllvorgang praktisch erfahrbar machen. In jedem Fall werden so formal gewonnene Einsichten konkretisiert. Es werden Vorstellungen aufgebaut, die haften bleiben und die praktischen Konsequenzen der gefundenen Zusammenhänge deutlich machen.

Besonders für praktisch denkende Schülerinnen und Schüler sind diese Zugänge sehr wesentlich.

Lit.: H. BESUDEN, *Knoten, Würfel, Ornamente*, Stuttgart (Klett) 1984; in diesem Zusammenhang vor allem S. 90-103

4. Zusammenhänge zwischen Formeln erkennen

4.1 Erkennen neuer Abhängigkeiten

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Drücke für ein Quadrat den Flächeninhalt A in Abhängigkeit vom Umfang U aus.

Bei einem Quadrat mit der Seitenlänge a gilt:

$$U = 4a \text{ und } A = a^2.$$

Löst man die erste Gleichung nach a auf, so erhält man:

$$a \quad \frac{U}{4}\ .$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich:

$$A \quad (\frac{U}{4})^2\ ,$$

also:

$$A \quad \frac{U^2}{16}\ .$$

Man hätte auch weniger abstrakt formulieren können:

Aufgabe 2: Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats mit dem Umfang 12 cm?

Man könnte zunächst wie eben die Formel

$$A \quad \frac{U^2}{16}\ .$$

herleiten und dann einsetzen. Das ergibt $A = 9\ cm^2$.

Die Lösung hätte man aber auch wesentlich einfacher erhalten können durch die Überlegung:
Ist $U = 12$ cm, dann ist a der 4. Teil davon, also 3 cm.
Ist $a = 3$ cm, dann erhält man durch Quadrieren $A = 9\ cm^2$.

(2) *Anforderungen und Schwierigkeiten*

Es ist klar, daß Aufgabe 1 den Schülerinnen und Schülern schwerer fällt als Aufgabe 2, weil sie ein formales Arbeiten erfordert.

Doch auch Aufgabe 2 dürfte einige Schwierigkeiten bereiten, wie die Bearbeitung folgender Aufgabe bei der TIMSS zeigt:

> **Aufgabe 3 (TIMSS):** Die Länge eines Rechtecks beträgt 6 cm, sein Umfang ist 16 cm. Wieviel Quadratzentimeter beträgt sein Flächeninhalt?

Diese Aufgabe wurde in der Mittelstufe international nur von 40% der Teilnehmer korrekt gelöst.

Das liegt daran, daß für diesen Aufgabentyp kein „Rezept“ vorhanden ist, sondern daß die Lösung Nachdenken und die Kombination von Wissen erfordert.

(3) *Variation der Anforderungen*

> **Aufgabe 4:** Bestimme den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Umfang 10 cm beträgt.

Diese Aufgabe ist analog zu Aufgabe 2 für den Kreis formuliert. Sie ist nur unwesentlich schwieriger.

Auch hier ist der Schwierigkeitsgrad erheblich höher, wenn die Aufgabe formal gestellt wird, oder wenn in der konkreten Aufgabe gefordert wird, daß zunächst eine Formel herzuleiten ist.

Es folgen nun 3 analoge Aufgaben für Körper.

> **Aufgabe 5:** Bestimme das Volumen eines Würfels mit einer Oberfläche von 120 cm².

> **Aufgabe 6:** Drücke das Volumen V einer Kugel in Abhängigkeit von ihrem Oberflächeninhalt O aus.

> **Aufgabe 7:** Drücke das Volumen V einer Kugel in Abhängigkeit von ihrem Umfang U aus.

(4) *Hintergrund*

a) Neues Wissen durch Kombination von Wissen

In allen diesen Aufgaben geht es darum, *Wissen zu kombinieren* und daraus neues Wissen zu gewinnen. Das ist eine grundlegende geistige Tätigkeit, die in der Mathematik ständig vollzogen wird. Trotzdem fällt es den Schülerinnen und Schülern schwer, sie selbständig auszuführen. Deshalb ist es notwendig, immer wieder Aufgaben zu stellen, in denen das gefordert ist. Wie wir gesehen haben, ist dies auf unterschiedlichem Anspruchsniveau möglich. Im wesentlichen unterscheiden sich die Anforderungen in der verlangten Repräsentation des Wissens. Bei der konkreten Aufgabenstellung sind in erster Linie *Überlegungen* gefordert, die formale Aufgabenstellung erfordert dagegen das Operieren mit *Formeln*.

b) Formeln kombinieren

Die formal gestellten Aufgaben erfordern das Kombinieren von Formeln. Dabei sind Formeln nach einer Variablen aufzulösen und Variable sind zu substituieren. Im Prinzip wird dies bei Gleichungssystemen bei der Lösung nach dem „Einsetzverfahren“ vorbereitet.

Der Übergang zum Arbeiten mit Formeln stellt eine erhebliche Steigerung der Anforderungen dar. Im Grunde müssen die Schülerinnen und Schüler bei diesen Aufgaben in der Lage sein, eine Formel nach jeder auftretenden Variablen aufzulösen. Das muß in der Algebra geübt werden. In der Geometrie kann dann diese Fähigkeit gesichert werden.

Wenn auch viele Schülerinnen und Schüler diese Anforderungen nicht erfüllen, dann muß man sich bewußt sein, daß sie in der höheren Mathematik und in der Physik nur geringe Chancen beim Verstehen und Bewältigen anspruchsvollerer Herleitungen haben werden. Für Schülerinnen und Schüler, die später Mathematik, Physik oder Ingenieurwissenschaften studieren wollen, ist der Erwerb dieser Fähigkeit unumgänglich.

4.2 Beziehungen zwischen Formeln erkennen

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Zeige, daß die Formel für den Flächeninhalt des Quadrats ein Sonderfall der Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms ist.

Das Quadrat ist ein besonderes Parallelogramm, bei dem $g = a$ und $h = a$ ist. Setzt man das in die Formel

$$A = g \cdot h$$

für den Flächeninhalt des Parallelogramms ein, dann ergibt sich

$$A = a \cdot a = a^2.$$

Das ist die Formel für den Flächeninhalt des Quadrats.

(2) *Anforderungen und Schwierigkeiten*

Den Schülern sollte bewußt sein, daß das Quadrat ein besonderes Parallelogramm ist. Die Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms müßte also auch für das Quadrat gelten und in diesem Fall die Formel für den Flächeninhalt des Quadrats liefern.

Trotzdem haben nach unseren Beobachtungen manche Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit dieser Aufgabe. Sie wissen nicht, was sie tun sollen. Dabei scheinen 2 Barrieren zu bestehen. Einmal wird der Sinn der Aufgabe überhaupt nicht erfaßt. Zum anderen wissen die Schülerinnen und Schüler nicht, wie sie konkret mit den in den Formeln auftretenden Variablen umgehen sollen. Man sollte also im Unterricht herausarbeiten, daß den Beziehungen zwischen den Vierecken Beziehungen zwischen den Formeln entsprechen.

(3) *Variation der Anforderungen*

Aufgabe 2: Für den Flächeninhalt A eines Trapezes mit den Seitenlängen a und c und der Höhe h gilt

$$A \qquad \frac{a \quad c}{2} h \; .$$

a) Setze für c = a. Was erhältst du? Was bedeutet das geometrisch?
b) Setze für c = 0. Was erhältst du? Was bedeutet das geometrisch?
Einsetzen ergibt in a)

$$A = a \cdot h.$$

Das spezielle Trapez ist also ein Parallelogramm. Für a = g erhält man die übliche Parallelogramm-Formel.
Für c = 0 ergibt sich in b)

$$A \qquad \frac{a}{2} h$$

Man erhält für diesen *Grenzfall* ein Dreieck. Für a = g erhält man die übliche Dreiecks-Formel.

Aufgabe 3: Bestimme den Flächeninhalt einer Raute mit a = 3 cm und h_a = 2 cm.

Eigentlich dürfte diese Aufgabe den Schülerinnen und Schülern keine Schwierigkeiten bereiten. Sie brauchten sich ja nur zu erinnern, daß die Raute ein spezielles Parallelogramm ist und könnten nun die Parallelogramm-Formel aus der Formelsammlung verwenden. Trotzdem fühlen sich manche Benutzer der Formelsammlung von ihr in dieser Situation im Stich gelassen und scheitern an der Aufgabe. Die Formelsammlung bietet für den Flächeninhalt der Raute nämlich nur die Formel an:

$$A_Q \quad \frac{1}{2}ef\ .$$

Dabei bedeuten e und f die Längen der Diagonalen. Diese sind in dieser Aufgabe aber gar nicht gegeben.

An dieser Stelle kann man den Schülerinnen und Schülern bewußt machen, daß die Rauten-Formel und die Drachen-Formel aus dem Rahmen fallen, weil sie A nicht wie die anderen Formeln in Abhängigkeit von einer Seite und der zugehörigen Höhe darstellen, sondern in Abhängigkeit von den Diagonalen. Man kann nun umgekehrt fragen, ob nicht auch bei den anderen Vierecken Formeln zu finden sind, bei denen die Diagonalen verwendet werden.

Aufgabe 4: a) Begründe, daß für den Flächeninhalt A_Q eines Quadrats mit den Diagonalenlängen e und f gilt:

$$A \quad \frac{1}{2}ef\ .$$

b) Überlege, ob man ebenso auch den Flächeninhalt eines Rechtecks aus seinen Diagonalenlänge bestimmen kann.

a): Da das Quadrat der Sonderfall einer Raute ist, gilt die Rauten-Formel auch für das Quadrat.

b) Das kann man z.B. mit einem Rechteck mit den Seitenlängen a = 3 cm und b = 4 cm widerlegen. Hier ist nach dem Satz des Pythagoras e = 5 cm, also gilt auch f = 5 cm. Nun ergibt sich: A = a·b = 3 cm· 4 cm = 12 cm².

Setzt man andererseits in $\frac{1}{2}e \cdot f$ ein, so erhält man dagegen12,5 cm².

Aufgabe 5: Von einem Parallelogramm kennt man eine Diagonale.

a) Suche eine weitere geeignete Länge, so daß du mit ihr und der Diagonalenlänge den Flächeninhalt des Parallelogramms erhältst. Gib die zugehörige Formel an.

b) Bestimme eine entsprechende Formel, in der die andere Diagonalenlänge auftritt.

c) Überlege, ob die Rauten-Formel in diesen beiden Formeln enthalten ist.

a): Sei also e gegeben. Die Diagonale des Parallelogramms zerlegt dieses in 2 kongruente Teildreiecke mit der Grundseite e. Den Flächeninhalt des Dreiecks kann man bestimmen, wenn man die Länge der zugehörigen Höhe h_e kennt.

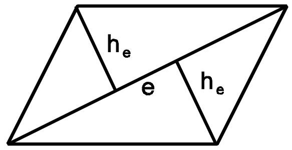


Fig. 4.1

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist also:

$$A_D \quad \frac{1}{2} e \cdot h_e \ .$$

Der Flächeninhalt A_P ist doppelt so groß, also:

$$A_P = e \cdot h_e.$$

b) Entsprechend findet man die Formel

$$A_P = f \cdot h_f.$$

c) Bei der Raute ist

$$h_e \quad \frac{f}{2} \quad \text{und} \quad h_f \quad \frac{e}{2} \ .$$

Setzt man in die Formel von a) h_e und in die Formel von b) h_f ein, so ergibt sich die Rautenformel

$$A \quad \frac{1}{2} e f \ .$$

Den Abschluß dieses Problemkreises kann die folgende Aufgabe bilden.

Aufgabe 6: a) Begründe: Für den Flächeninhalt A_V eines beliebigen Vierecks mit den Diagonalenlängen e und f und den zugehörigen Höhen h_e und h'_e bzw. h_f und h'_f gilt:

$$A_V \quad \frac{1}{2} e \cdot (h_e \quad h_e) \quad \text{und} \quad A_V \quad \frac{1}{2} f \cdot (h_f \quad h_f)$$

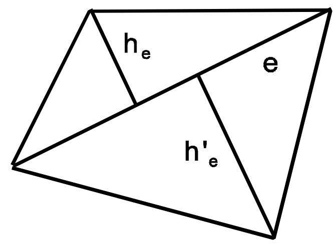


Fig. 4.2

b) Zeige, daß in dieser Formel die entsprechenden Formeln für den Drachen, das Parallelogramm, die Raute, das Rechteck und das Quadrat enthalten sind.

a) Die erste Formel ergibt sich unmittelbar durch Anwendung der Dreiecksformel auf die beiden durch die Diagonale entstandenen Teildreiecke.
b) Die Formel für den Drachen ergibt sich für $h_e + h'_e = f$.
Die Raute und das Quadrat sind besondere Drachen, also gilt die Drachen-Formel auch für sie.
Für das Parallelogramm ergibt sich mit $h'_e = h_e$ die Formel $A_P = e \cdot h_e$. Sie gilt auch für das Rechteck als Sonderfall des Parallelogramms.

Man kann auch entsprechende Überlegungen für Körper anstellen.

Aufgabe 7: Zeige, daß die Formel für das Volumen eines Würfels in der Formel für das Volumen eines Prismas als Sonderfall enthalten ist.

Es handelt sich hier um das räumliche Analogon zu Aufgabe 1.

(4) *Hintergrund*

a) Begriffsnetze und ihre Konsequenzen

Im Rahmen der Viereckslehre lernen die Schüler Formeln für die Flächeninhalte der einzelnen Viereckstypen kennen. Am „Haus der Vierecke“ werden Beziehungen zwischen den Viereckstypen deutlich gemacht. Den Beziehungen zwischen den Vierecken müssen also auch Beziehungen zwischen den jeweiligen Formeln für die Flächeninhalte entsprechen.

Das Entsprechende gilt für die Körper. Auch zwischen ihnen bestehen Beziehungen, die sich in den zugehörigen Volumenformeln niederschlagen.

In Aufgabe 2 haben wir gesehen, daß in der Trapez-Formel die Formel für das Parallelogramm enthalten ist. Das ist nicht verwunderlich, denn man kann das Parallelogramm als *Sonderfall* des Trapezes ansehen. Auch die Dreiecksformel ergibt sich, denn das Dreieck ist ein *Grenzfall* des Trapezes.

Es gibt übrigens auch eine entsprechende „Superformel“ für die Rauminhalte. Die Formel

$$V \quad \frac{h}{3}(G_1 \quad \sqrt{G_1 G_2} \quad G_2)$$

für das Volumen eines Pyramidenstumpfes mit der Grundfläche G_1, der Deckfläche G_2 und der Höhe h enthält

- als *Sonderfälle* die Volumenformeln für den *Würfel* mit der Kantenlänge a, für den *Quader* mit den Kantenlängen a, b und c, für das *Prisma* mit der Grundfläche G und der Höhe h,
- als *Grenzfälle* außerdem die Volumenformeln für die *Pyramide* mit der Grundfläche G und der Höhe h, für den *Zylinder* mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h und für den *Kegel* mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h. Zugleich gilt sie für den *Kegelstumpf.*

Im Lichte dieser Betrachtungen gewinnt die Formel für den Rauminhalt des Pyramidenstumpfes ein ganz neues Gewicht.

Eine Volumenformel, in der auch noch die Formel für das Volumen der Kugel enthalten ist, ist die *Keplersche Faßregel.*

Lit.: A. FRICKE, *Didaktik der Inhaltslehre*, Stuttgart (Klett) 1983

b) Entdeckendes Lernen

Die Rauten-Formel haben wir in den Aufgaben 4-6 dazu verwendet, Formeln für den Flächeninhalt von Vierecken zu suchen, bei denen Diagonalenlängen gegeben sind. Das führte zur Entdeckung der Formeln für das beliebige Viereck, und gab Anlaß zu der Untersuchung, welche Formeln sich daraus für die besonderen Vierecke ergeben. Diese Aufgaben sind also geeignet, *entdeckendes Lernen* in Gang zu setzen. Mit ihrem Wissen haben die Schülerinnen und Schüler eine Chance, neue Antworten zu finden, die in diesem Fall sogar über das hinaus führen, was sich in der Formelsammlung findet. Bei den vorangegangenen Aufgaben haben sie gesehen, wie man Zusammenhänge zwischen Formeln sucht und begründet. Dies können sie nun als *Forschungsroutine* anwenden.

Die Schülerinnen und Schüler erwerben mit diesen Aufgaben also nicht nur Sachwissen sondern auch methodisches Wissen, also *Metawissen*.

Lit.: H. WINTER, *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*, Braunschweig (Vieweg) 1989

4.3 Mit Formeln Brücken schlagen

(1) *Aufgabenstellung und Lösung*

Aufgabe 1: Leite eine Formel für den Flächeninhalt A eines Parallelogramms in Abhängigkeit von den Seitenlängen a und b und dem Winkel α her.

Um die übliche Parallelogramm-Formel verwenden zu können, benötigte man noch eine Höhe. Die Figur zeigt, daß man die Höhe mit Hilfe von b und α ausdrücken kann durch $h = b \cdot \sin \alpha$. Das ergibt die gesuchte Formel:

$$A = a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

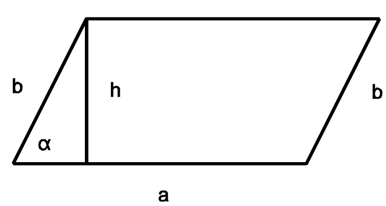


Fig. 4.1

(2) *Anforderungen*

Im allgemeinen beschränkt man sich im Unterricht darauf, im Rahmen der Trigonometrie allenfalls für das Dreieck eine Formel herzuleiten. Die Überlegungen für das Dreieck lassen sich jedoch ohne Schwierigkeiten auf das Parallelogramm übertragen. Man sollte den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit bieten, selbständig derartige Formeln für die bekannten Viereckstypen herzuleiten.

(3) *Hintergrund*

Zwischen verschiedenen Gebieten Brücken schlagen

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf Beziehungen zwischen Formeln jeweils eines Themenkreises. Doch ist es wichtig, auch Beziehungen zwischen Formeln aus *unterschiedlichen Gebieten* zu erkennen.

So wird man etwa in der *Trigonometrie* mit der Flächeninhaltsformel

$$A \quad \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

mit $h_a = b \sin \gamma$ eine Brücke von der Dreiecksformel der Elementargeometrie zur Trigonometrie geschlagen. Dies sollte auch für andere Figuren geschehen.

Man sollte den Schülerinnen und Schülern aber auch bewußt machen, daß umgekehrt die Formeln der Elementargeometrie in den entsprechenden Formeln der Trigonometrie enthalten sind.

Das gilt auch für andere Gebiete. In der Integralrechnung liefert das bestimmte Integral eine Möglichkeit, „Flächeninhalte unter Kurven“ zu bestimmen. Den Schülerinnen und Schülern sollte deutlich gemacht werden, daß dieses allgemeine Verfahren für Figuren der ebenen Geometrie die bekannten Formeln als Sonderfälle enthält.

In der Integralrechnung kann man mit der folgenden Aufgabe eine Brücke zur Elementargeometrie schlagen:

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß man mit Hilfe des Integrals

$$\int_0^a b \, dx$$

den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b bestimmen kann.

Deutlich anspruchsvoller ist die

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß das Integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

den Flächeninhalt eines Viertelkreises mit dem Radius r liefert. Vergleichen Sie das Ergbnis mit der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises.

Diese Berechnungen liefern zwar nichts Neues, doch sieht man das Vertraute nun in neuem Licht. Und das ist durchaus ein Zuwachs an Erkenntnis.

4.4 Von Formeln nicht abhängig werden

(1) *Aufgabenstellungen und Lösungen*

Aufgabe 1: Eine rechteckige Fläche von 2 m² Flächeninhalt wird mit quadratischen Platten mit einer Seitenlänge von 20 cm² ausgelegt. Wie viele Platten passen hinein?

2 m² sind 20 000 cm². Eine quadratische Platte hat einen Flächeninhalt von 400 cm². Also passen 20 000 cm² : 400 cm² = 50 Platten hinein.

Aufgabe 2: Berechne den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

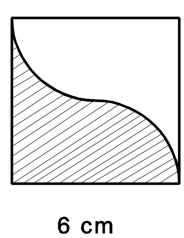


Fig.4.2

Die schraffierte Fläche ist halb so groß wie das Quadrat. Dieses hat einen Flächeninhalt von 36 cm². Die schraffierte Fläche hat also einen Flächeninhalt von 18 cm².

Aufgabe 3: Wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?

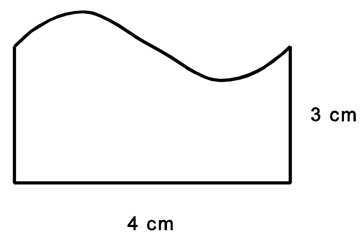


Fig. 4.3

Die Figur ist flächeninhaltsgleich dem Rechteck mit den Seitenlängen a = 4 cm; b = 3 cm. Sein Flächeninhalt beträgt 12 cm².

Aufgabe 4: Wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?

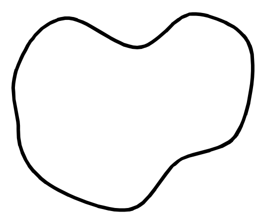


Fig. 4.4

Hier ist ein Näherungslösung angezeigt, die man z.B. durch Abzählen von Karos finden kann.

(2) *Anforderungen und Schwierigkeiten*

An sich sind alle diese Aufgaben *leicht*. Erfahrungsgemäß bereiten sie fortgeschrittenen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten, weil sie versuchen, die Probleme mit Formeln anzugehen. Sie sind *blind* für die Lösungen, die sich durch Überlegung oder durch Näherung ergeben.

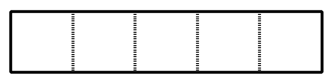
(3) *Hintergrund*

Das Problem der naheliegenden Lösungen

Die Schülerinnen und Schüler lernen im Laufe ihrer Schulzeit immer leistungsfähigere Verfahren zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten kennen. Ein bestimmter schulischer Kontext bestimmt häufig das zu wählende Verfahren.

Werden die Schülerinnen und Schüler unabhängig vom Unterricht mit derartigen Problemen konfrontiert, dann sind sie häufig hilflos. Das zeigt sich z.B. auch in der TIMSS.

Aufgabe (TIMSS) Die Figur besteht aus 5 Quadraten gleicher Größe. Der Flächeninhalt der ganzen Figur beträgt 405 cm².



Bestimme den Umfang eines Quadrats.
Bestimme die Seitenlänge des Quadrats.
Bestimme den Umfang der ganzen Figur in Zentimetern.

Beantworteten weltweit noch 60% der Teilnehmer die 1. Frage richtig, so waren es bei der zweiten Frage nur noch 29% und bei der dritten schließlich nur 23%.

So wichtig die Beherrschung des Arbeitens mit Formeln ist, sollte man doch vermeiden, daß die Schülerinnen und Schüler abhängig von ihnen werden.

5. Langfristiges Lernen der Inhaltsbegriffe

5.1 Modelle langfristigen Lernens

Wir haben hier Aufgabentypen vorgestellt, die es ermöglichen sollen, die Begriffe Flächeninhalt und Rauminhalt auf *unterschiedlichen Niveaus* zu lernen. Dabei wollen wir sie eingebettet sehen in einen *langfristigen* Lernprozeß über die Schulzeit hinweg. Wenn wir von unterschiedlichen Niveaus sprechen, meinen wir damit verschiedene *Stufen des Verstehens und Könnens*. Wir gehen davon aus, daß sich im Unterricht ein langfristiges Lernen in Stufen einstellen kann. Unsere Beobachtungen lassen uns vermuten, daß häufig lediglich ein *Lernen im Puzzle* oder gar nur ein *Lernen durch Anhäufen* erreicht wird.

Beim Lernen im Puzzle werden zwar Zusammenhänge zwischen Teilen des Wissens gesehen, aber das Denken beschränkt sich auf ein bestimmtes Niveau. Wir denken hier an einen Lernenden, dem es z.B. bewußt ist, daß es für die besonderen Vierecke bestimmte Flächeninhaltsformeln gibt, die als Vierecks-Formeln zusammengehören, ohne daß ihm bewußt ist, daß z.B. die Quadratformel ein Sonderfall der Parallelogramm-Formel ist.

Wenn nicht einmal Zusammenhänge gesehen werden, würden wir ein bloßes Lernen durch Anhäufen annehmen.

Wir können den beim Lehren des Flächeninhaltsbegriffs intendierten Lernprozeß aber auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt betrachten. Beim Übergang vom Flächeninhalt der Vielecke zum Flächeninhalt des Kreises wird die durch den geradlinigen Rand gegebene Begrenzung der Methode überwunden. Wir sprechen hier von einem *Lernen durch Erweiterung*. Dabei ist wichtig, daß die Lernenden den Übergang als einen Erweiterungsprozeß erleben, bei dem durch eine neue Idee, die sich auf bekannte Ergebnisse und Methoden stützt, eine Grenze überwunden wird.

Lernen in Stufen und Lernen durch Erweiterung stellen sich im Unterricht nicht beiläufig ein, sondern müssen sorgfältig geplant und durch konkrete Unterrichtsmaßnahmen angebahnt werden. Dazu sollen die vorgestellten Aufgabentypen beitragen.

Wie derartige Lernprozesse im Unterricht organisiert werden können, soll in den folgenden Abschnitten gezeigt werden.

Lit.: H.-J. VOLLRATH, *Modelle langfristigen Lernens von Begriffen im Mathematikunterricht*, Mathematik in der Schule 33 (1995) 460-472

5.2 Langfristiges Lernen des Begriffs Flächeninhalt

Wir wollen zunächst die entscheidenden Schritte in dem langfristigen Lernprozeß für den Begriff Flächeninhalt beschreiben.

Anfangsphase: *Aufbau intuitiver Vorstellungen von der Größe einer Fläche.*

In der Grundschule lernen die Kinder von *großen* und *kleinen* Flächen zu sprechen. Sie sehen das zunächst „auf einen Blick“. Dann lernen sie Flächen zu vergleichen, indem sie z.B. prüfen, ob eine Fläche in die andere paßt. Es ist also ein qualitativer Vergleich möglich.

Übergang: *Von intuitiven Vorstellungen über die Größe einer Fläche zum Abzählen der Einheitsquadrate in einem Rechteck.*

Die Kinder erkennen, daß man Flächen auch dadurch vergleichen kann, daß man sie mit Einheitsquadraten auslegt und die Anzahl der Einheitsquadrate vergleicht. Sie erfahren, daß die Anzahl der Einheitsquadrate, mit denen man ein Rechteck füllen kann, ein Maß für die Größe des Rechtecks darstellt.

Der wesentliche Fortschritt ist nun, daß die Flächeninhalte von Rechtecken durch den Vergleich der Maßzahlen verglichen werden können. Diese entscheidende Idee ist das Ergebnis einer Reflexion. Man kann deshalb diesen Lernfortschritt als Ersteigen einer *höheren Stufe* ansehen.

Die Lernenden erkennen, daß man den Flächeninhalt des Rechtecks durch *geschicktes Abzählen* leichter gewinnen kann, als wenn man einfach nur nacheinander zählt. Man erkennt z.B.: Das Rechteck läßt sich mit b Reihen zu je a Quadraten auslegen. Insgesamt erhält man also $a \cdot b$ Einheitsquadrate.

Übergang: *Von einer Formel für die Anzahl der Quadrate zu einer Formel mit Längen.*

Arbeitet man mit der Formel für die Anzahl der Quadrate, so erkennen die Schüler bald: Man braucht nur die Maßzahl der Länge mit der Maßzahl der Breite zu multiplizieren. Die Formel $A = a \cdot b$ ist eine abgekürzte Schreibweise für diesen Sachverhalt. Der Flächeninhalt A des Rechtecks wird gedeutet als Produkt der Längen a und b. Der Übergang *von der Zählformel* für die Anzahl der enthaltenen Einheitsquadrate im Rechteck *zur Formel* mit dem Produkt von Längen läßt sich durch eine *Reflexion* erreichen, bei der eine höhere

Abstraktionsstufe erstiegen wird. Dies spricht also für ein *Lernen in Stufen.*

Übergang: *Von einer Formel mit natürlichen Maßzahlen zu einer Formel mit gebrochenen Maßzahlen.*

Wenn das Auslegen mit den Einheitsquadraten beim Rechteck nicht aufgeht, wird man versuchen, zu einem kleineren Einheitsquadrat überzugehen, bei dem das Auslegen aufgeht. Dann kann man die Formel anwenden. Drückt man nun das Ergebnis in der größeren Einheit aus, wird deutlich, daß man die Formel auch auf gebrochene Maßzahlen ausdehnen kann. Die Begrenzung der natürlichen Maßzahlen wird damit überwunden. (Daß die Verwendung gebrochener Maßzahlen auch eine Begrenzung auf den kommensurablen Fall darstellt, kann man den Lernenden auf dieser Stufe nicht deutlich machen.) Der Übergang läßt sich damit als *Lernen durch Erweiterung* deuten.

Übergang: *Vom Rechteck zu den Vielecken.*

Das Auslegen mit Quadraten wurde bisher auf das Rechteck beschränkt. Schon bei Dreiekken muß es scheitern, weil es im allgemeinen nicht aufgeht. Die entscheidende Idee ist, zu dem Dreieck ein inhaltsgleiches Rechteck zu finden. In einer Reflexion wird die entscheidende Beziehung zwischen Dreieck und Rechteck bzw. Parallelogramm und Rechteck erkannt. Damit läßt sich das neue Problem auf das bereits bewältigte Problem zurückführen. Diesen Lernfortschritt kann man als *Lernen in Stufen* beschreiben.

Wie man vorgehen sollte, um den Lernenden eine Chance zu geben, diesen Sachverhalt selbst zu entdecken, ist sehr eindrucksvoll von WERTHEIMER (1957) dargestellt worden.

Mit der neu gewonnenen Einsicht lassen sich nun Formeln für die Flächeninhalte von Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen, Drachen und Rauten angeben. Mit Hilfe von *Triangulationen* kann man prinzipiell für jedes Vieleck den Flächeninhalt berechnen.

Durch *Flächenverwandlung* kann man jedes Vieleck in ein inhaltsgleiches Rechteck und nach der Satzgruppe des Pythagoras mit Zirkel und Lineal in ein Quadrat überführen.

Übergang: *Von den Formeln zu den Beziehungen zwischen den Formeln.*

In der Formenkunde erkennen die Lernenden mit dem „Haus der Vierecke“ Beziehungen zwischen den Vierecken. Das Quadrat ist ein Sonderfall des Rechtecks, das Rechteck ist ein Sonderfall des Parallelogramms. Entsprechend sollte in der Inhaltslehre deutlich werden, daß die Formel für den Flächeninhalt des Quadrats ein Sonderfall der Formel für den

Flächeninhalt des Rechtecks und diese wiederum ein Sonderfall der Flächeninhaltsformel für das Parallelogramm ist. Diese Einsicht wird in einer Reflexionsphase gewonnen, so daß man von einem *Lernen in Stufen* sprechen kann.

Übergang: *Von den Vielecken zum Kreis.*

Die Flächeninhalte von Kreisen und Kreisteilen werden durch Approximation mit bekannten Flächen bestimmt. Auch bei diesem Übergang wird wiederum eine Grenze überschritten, indem man das Operieren mit Vielecksflächeninhalten auf Kreise und Kreisteile ausweitet. Darin sehe ich ein *Lernen durch Erweiterung.*

Übergang: *Von den ebenen zu den gekrümmten Flächen.*

Bei den Berechnungen der Oberflächeninhalte von Körpern tritt auch das Problem auf, den Inhalt gekrümmter Flächen zu berechnen. Im Fall des Zylinders und des Kegels löst man das Problem durch Abwicklung. Bei der Kugel approximiert man die Oberfläche durch ein „Netz“ von Vielecken, das von Pyramidengrundflächen gebildet wird, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt liegen. Bei diesem Übergang wird man von einem *Lernen durch Erweiterung* sprechen können.

Übergang: *Flächeninhalt als Maßbegriff.*

Der Begriff des Flächeninhalts ist ein *Maßbegriff*, wie die Begriffe Länge, Rauminhalt und Winkelmaß. HOLLAND hebt bei diesen Begriffen als gemeinsame Eigenschaften hervor: die Invarianz gegenüber Kongruenzabbildungen und die Additivität. Eine solche analysierende Betrachtung am Ende der Sekundarstufe I oder in der Sekundarstufe II könnte zu einer höheren Stufe führen. HOLLAND selbst ist aber skeptisch, ob diese Stufe im Unterricht überhaupt erreicht werden soll (HOLLAND 1996, S. 193).

Übergang: *Von der Parabel zu Graphen.*

Die Einführung des bestimmten Integrals setzt normalerweise mit der Bestimmung des Flächeninhalts „unter einer Parabel“ an. Im Grunde verallgemeinert man das Verfahren, das man beim Kreis erfolgreich benutzt hatte. Die Reflexion dieses Verfahrens führt zur Integralrechnung. Dies spricht für ein *Lernen in Stufen.*

Lit.: G. HOLLAND, *Geometrie in der Sekundarstufe*, Heidelberg (Spektrum) 1993

M. WERTHEIMER, *Produktives Denken*, Frankfurt/M. (Kramer) 1957

5.3 Langfristiges Lernen des Begriffs Rauminhalt

Das langfristige Lernen des Begriffs Rauminhalt wollen wir nur skizzieren und dabei Beziehungen zum Begriff Flächeninhalt herstellen.

Auch hier beginnt der Lernprozeß mit dem Aufbau *intuitiver Vorstellungen* in der Grundschule.

In der Sekundarstufe I wird dann analog zum Flächeninhalt mit dem Gewinn von *Formeln* für den Rauminhalt eines Würfels und eines Quaders eine höhere Stufe erreicht. Eine Verbindung zum Begriff des Flächeninhalts wird über die Oberflächenformeln geknüpft. Dabei beschränken sich die Betrachtungen auf natürliche Zahlen als Maßzahlen.

Der Übergang zu *gebrochenen Maßzahlen* in der 6. Jahrgangsstufe stellt ein Lernen durch Erweiterung dar.

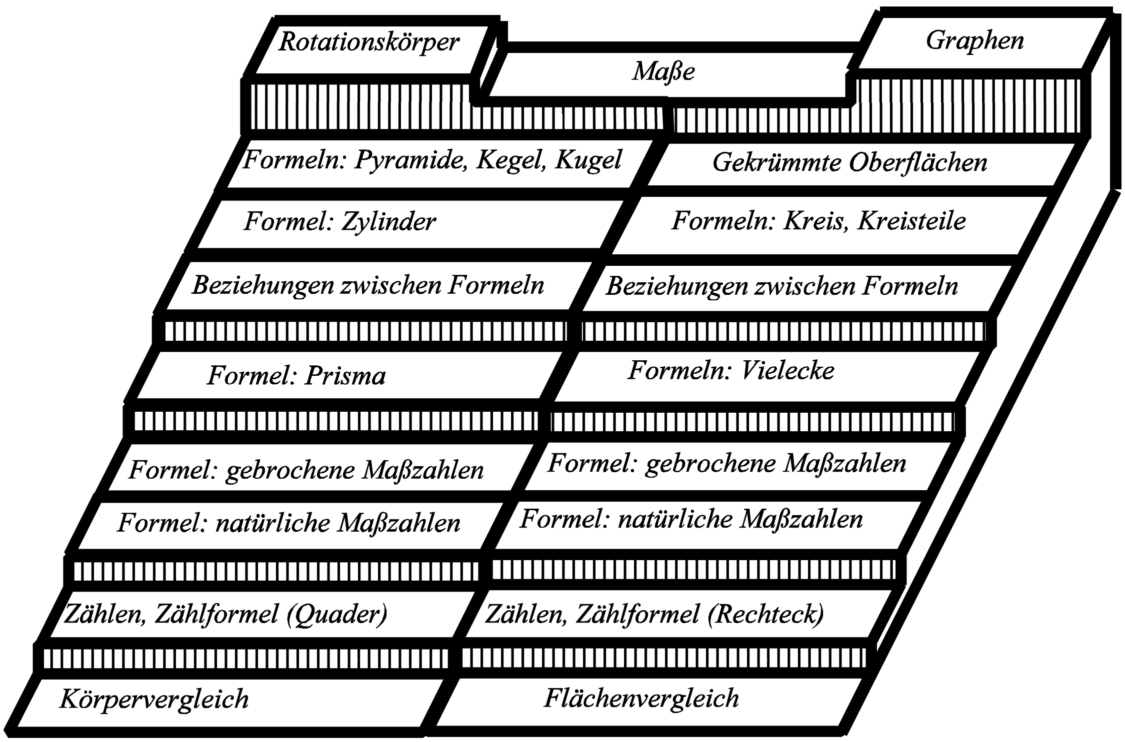
In der 8. Jahrgangsstufe wird eine *Formel für den Rauminhalt des Prismas* gefunden. Bei der Herleitung wird die Herleitung der Flächeninhaltsformeln für Vielecke auf den Raum übertragen. Mit dem Cavalierischen Prinzip werden schiefe Prismen einbezogen. Wir können also von einem Lernen durch Erweiterung sprechen. Zugleich ist natürlich auch über die Flächeninhaltsbetrachtungen eine höhere Stufe des Verstehens erreicht.

Im Zusammenhang mit dem Kreis wird die Volumenformel für den *Zylinder* erarbeitet. Auch dies ist ein Lernen durch Erweiterung. Mit dem Zylindermantel lernen die Schülerinnen und Schüler nun eine gekrümmte Oberfläche kennen. Dies führt ja zu einer Erweiterung beim Lernen des Flächeninhaltsbegriffs.

In der 10. Jahrgangsstufe folgen dann die Volumenformeln für *Pyramide, Kegel* und *Kugel*. Auch dieser Übergang stellt sich als Erweiterungslernen dar.

Die Sekundarstufe II trägt mit der Integralrechnung eine Formel für das Volumen bestimmter *Rotationskörper* bei. Dies läßt sich sowohl als Lernen durch Erweiterung als auch durch Ersteigen einer höhen Stufe deuten.

5.4 Übersicht



Ein Modell für das langfristige Lernen der Inhaltsbegriffe

5.5 Stufen des Verstehens

Beim Lehren der Inhaltsbegriffe werden unterschiedliche *Stufen des Verstehens* angestrebt. Diese Stufen lassen sich durch bestimmte Kenntnisse und Fähigkeiten beschreiben. Dabei spielen *Aufgaben* eine wichtige Rolle. Mit ihnen kann der Lernprozeß angestoßen, gesichert, vertieft und kontrolliert werden.

Betrachten wir die Fähigkeiten, die auf den einzelnen Stufen unseres Modells angestrebt werden.

1. Stufe: *Flächen- und Rauminhalt als meßbare Größen*

Den Schülerinnen und Schülern ist bewußt, daß Quadrate und Rechtecke einen Flächeninhalt und Würfel und Quader einen Rauminhalt haben. Dabei handelt es sich um Größen, die jeweils durch Maßzahl und Maßeinheit bestimmt sind. Messen bedeutet dabei, daß man bestimmt, wie oft die Maßeinheit in der gegebenen Größe enthalten ist.

- Die Schülerinnen und Schüler können den Flächeninhalt eines Quadrats oder eines Rechtecks durch Auslegen und Abzählen von Einheitsquadraten bestimmen.
- Sie können den Rauminhalt eines Würfels oder eines Quaders durch Auslegen und Abzählen von Einheitswürfeln bestimmen.

2. Stufe: *Flächen- und Rauminhalt als berechenbare Größen*

Die Schülerinnen und Schüler wissen, wie man den Flächeninhalt von Quadraten und Rechtecken sowie den Rauminhalt von Würfeln und Quadern mit Hilfe von Formeln berechnen kann, wenn man die Seiten- bzw. Kantenlängen kennt.

- Die Schülerinnen und Schüler können die Flächeninhaltsformeln für Quadrat und Rechteck sowie die entsprechenden Umfangsformeln angeben.
- Sie können die Rauminhaltsformeln für Würfel und Quader sowie die entsprechenden Formeln für den Oberflächeninhalt angeben.
- Sie können Umfang und Flächeninhalt von gegebenen Quadraten und Rechtecken mit Hilfe von Formeln berechnen.
- Sie können Rauminhalt und Oberflächeninhalt von gegebenen Würfeln und Quadern mit Hilfe von Formeln berechnen.
- Sie können die jeweiligen Größen in verschiedenen Maßeinheiten angeben.

3. Stufe: *Flächeninhalte und Rauminhalte in Abhängigkeit von anderen Größen*

Die Schülerinnen und Schüler lernen jetzt auch Formeln für den Flächeninhalt von Dreieck, Parallelogramm, Trapez, Drachen und Raute, später auch für den Kreis, sowie für den Rauminhalt des Prismas, später auch für Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel kennen. Diese Formeln drücken jeweils den Flächeninhalt bzw. Rauminhalt in Abhängigkeit von anderen Größen (z.B. Längen oder Flächeninhalten) aus.

- Sie können zu den verschiedenen Figuren oder Körpern die entsprechenden Formeln angeben.
- Sie können mit Hilfe der entsprechenden Formeln Flächen- bzw. Rauminhalte berechnen.
- Sie können mit Hilfe der Formeln Aufgaben lösen, bei denen irgendeine der in der Formel auftretenden Größen gesucht ist.

- Sie können für zusammengesetzte Figuren den Flächeninhalt und für zusammengesetzte Körper den Rauminhalt bestimmen.

- Sie können mit Hilfe der bekannten Formeln für zusammengesetzte Figuren eine Formel für den Flächeninhalt bzw. für zusammengesetzte Körper die entsprechende Formel für dem Rauminhalt herleiten.

- Sie können auf Grund entsprechender Formeln Flächeninhaltsgleichheit von Figuren bzw. Rauminhaltsgleichheit von Körpern erkennen und begründen.

4. Stufe: *Flächeninhalts- und Rauminhaltsformeln als Beziehungsgefüge*

Den Lernenden ist nun bewußt, daß dem Beziehungsgefüge zwischen den Figuren und zwischen den Körpern Beziehungen zwischen Flächeninhaltsformeln und Rauminhaltsformeln entsprechen.

- Ist eine Figur ein Sonderfall einer anderen, so können sie zeigen, daß die entsprechende Formel der besonderen Figur in der Formel der allgemeineren Figur enthalten ist.

- Ist ein Körper ein Sonderfall eines anderen, so können sie zeigen, daß die entsprechende Formel des besonderen Körpers in der Formel des allgemeineren Körpers ist.

- Sie können aus Formeln neue Beziehungen zwischen Flächeninhalten bzw. zwischen Rauminhalten erkennen.

- Sie können Formeln nutzen, um neue Zusammenhänge zu entdecken.

5. Stufe: *Flächeninhalte und Rauminhalte als Maßbegriffe*

Den Schülerinnen und Schülern ist bewußt daß Flächeninhalte und Rauminhalte zu den geometrischen Maßbegriffen Länge, Winkelmaß, Flächeninhalt, Rauminhalt gehören.

- Ihnen ist bewußt, daß diesen Begriffen jeweils *Maßfunktionen* zugrundeliegen, die einer Figur bzw. einem Körper ein Maß zuordnen, z.B. einer Strecke ihre Streckenlänge, einem Winkel sein Winkelmaß, einem Vieleck seinen Flächeninhalt, einem Körper seinen Rauminhalt.

- Sie wissen, daß diese Maßfunktionen *invariant gegenüber Kongruenzabbildungen* sind, d.h. kongruente Strecken sind gleich lang, kongruente Winkel sind gleich groß, kongruente Figuren haben gleichen Flächeninhalt, kongruente Körper haben gleichen Rauminhalt.
- Sie wissen, daß diese Maßfunktionen *additiv* sind, d.h. läßt sich eine Figur in Teilfiguren zerlegen, so ist das Maß der Figur gleich der Summe der Maße der Teilfiguren.

6. Stufe: *Flächeninhalte und Rauminhalte als Integrale*

Die Schülerinnen und Schüler haben die Berechnung von Flächeninhalten der Flächen unter Graphen, des Rauminhalts und des Oberflächeninhalts von Rotationskörpern als wichtige Anwendungen der Integralrechnung kennengelernt.

- Sie können Flächeninhalte von Flächen unter Graphen berechnen.
- Ihnen ist bewußt, daß dieses Verfahren die elementaren Berechnungen von Flächeninhalten verallgemeinert. Sie wissen z.B. daß man den Flächeninhalt eines Kreises auch durch Integration bestimmen kann.
- Sie können die Rauminhalte und die Oberflächeninhalte von bestimmten Rotationskörpern durch Integration bestimmen.
- Ihnen ist bewußt, daß dieses Verfahren die elementaren Berechnungen der Rauminhalte von Rotationskörpern verallgemeinert. Sie wissen z.B. daß man den Rauminhalt eines Kegels auch durch Integration bestimmen kann.

5.6 Zuordnung der Aufgaben zu den Stufen des Verstehens

Die behandelten Aufgaben lassen sich nun den angegebenen Stufen des Verstehens zuordnen. Einen Überblick gibt die Tabelle.

Kapitel	**Aufgabennummer**	**Stufe 1**	**Stufe 2**	**Stufe 3**	**Stufe 4**	**Stufe 5**	**Stufe 6**
2.1	1			x			
	2			x			
	3			x			
2.2	1			x			
	2			x			
3.1	1			x			
	2			x			
	3			x			
	4			x			
	5			x			
3.2	1				x		
	2				x		
	3				x		
	4				x		
	5				x		
3.3	1			x			
	2				x		
	3				x		
	4				x		
4.1	1				x		
	2		x				
	3		x				
	4				x		
	5				x		
	6				x		
	7				x		
4.2	1				x		
	2				x		
	3				x		
	4				x		
4.3	1				x		
	2						x
	3						x
4.4	1	x					
	2		x				
	3		x				
	4	x					

Wie man sieht, sind die von uns behandelten Aufgaben im wesentlichen der 3. und 4. Stufe zuzuordnen. Das sind die Stufen, die besonders durch das Arbeiten mit Formeln geprägt sind. Vor allem die Aufgaben, die der 4. und 6. Stufe zuzuordnen sind, werden nach unserem Eindruck in den Schulbüchern vernachlässigt.

Wir haben keine Aufgaben zur 5. Stufe angegeben, weil hier Formeln praktisch keine Rolle spielen.